Correction TP5 python

Exercice 1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.linspace(-3,3,100)
y=x**2
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(0,4.01,0.01)
y=np.sqrt(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

✓ Avec la fonction arange(start,stop,step), le paramètre stop n'est pas atteint, c'est pourquoi on prend stop=4.01 et non stop=4.

Exercice 3

La fonction est $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$ ou encore $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+3}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(x):
    y=x
    for k in range(3):
        y=1/(1+y)
    return y
x=np.linspace(0,5,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 4

1) f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ comme composée des fonctions $x \mapsto 3+x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}$, toutes deux croissantes sur $\mathbf{R}_+$.

2)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ».

$u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
f étant croissante sur $[0,1]$, on déduit : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$, c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3)Les inégalités précédentes montrent que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée (par).
D'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers L et par passage à la limite : $0 \leq L \leq 1$.
f étant continue sur $\mathbf{R}$ donc en L, le théorème du point fixe s'applique.
L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Or, $f(x) = x \iff \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2} = x \iff \sqrt{3+x^2} = 2x \iff 3+x^2 = 4x^2$ et $x > 0$ $\iff x^2 = 1$ et $x > 0 \iff x = 1$.

Donc $L = 1$.
4)programme :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=0.5*np.sqrt(3+x**2)
    return y
u=0
n=0
while np.abs(u-1)>10**-4:
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 5

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
r=np.sqrt(2)
x=[2,r,0,-r,-2,-r,0,r,2]
y=[0,r,2,r,0,-r,-2,-r,0]
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 6

1)$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

2)programme :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.linspace(-0.5,0.5,100)
plt.plot(x,np.log(1+x))
plt.plot(x,x-0.5*x**2)
```

On constate que les courbes sont très proches au voisinage de 0.
C'est le principe du développement limité : on a approché la fonction f au voisinage de 0 par une fonction polynomiale.

<u>Exercice 7</u>
1)f est continue sur $]0,1]$ comme somme de fonctions continues et strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes.
C'est donc une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1]) =]-\infty,1]$.
$0 \in]0,1]$ admet donc un unique antécédent $\alpha \in]0,1]$.
α est donc l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

2)programme :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.linspace(0.01,1,100)
y=x+np.log(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Graphiquement, $\alpha \approx 0.6$

✓ On peut aussi définir une fonction f et remplacer la ligne 4 par $y = f(x)$.

3)programme :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x+np.log(x)
    return y
a=0
b=1
while b-a>10**-4:
    c=(a+b)/2
    if f(c)<0:
        a=c
    if f(c)>0:
        b=c
print(c)
```

On obtient $\alpha \approx 0,5672$.

Exercice 8

1) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = e^{-x}f(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

f est continue (car dérivable) sur $\mathbf{R}$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})$.

Avec $f(\mathbf{R}) = f(]-\infty,+\infty[=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^{t} = 1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, $f(\mathbf{R}) =]0,1[$.

2)La commande *plt.plot(x,y)* trace la courbe de f.

La commande *plt.plot(y,x)* trace la courbe de f^{-1}.

La commande *plt.plot(x,y)* trace la droite d'équation $y = x$.

Remarque

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à cette droite.

3)Soit $y \in]0,1[$.

$y = f(x)$

$\iff y = e^{-e^{-x}}$

$\iff \ln y = -e^{-x}$

$\iff e^{-x} = -\ln y$

$\iff -x = \ln(-\ln y)$

$\iff x = -\ln(-\ln y)$.

Donc $\forall y \in]0,1[,\ f^{-1}(y) = -\ln(-\ln y)$.

Exercice 9

1) f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ f'(x) = a(1-2x)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

Les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$.

$$
\begin{aligned}
\text{Or, } f(x) = x &\iff ax(1-x) = x \\
&\iff ax(1-x) - x = 0 \\
&\iff x\big(a(1-x) - 1\big) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } a(1-x) - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{a-1}{a}
\end{aligned}
$$

Les points fixes de f sont donc 0 et $\frac{a-1}{a}$.

2)Utiliser que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f(x) \leq \frac{a}{4}$.
Ne pas oublier aussi que $a \in [0,4]$.

3)fonction :

```
def u(a,u0,n):
    u=u0
    for k in range(n):
        u=a*u*(1-u)
    return u
```

4)fonction :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def dessiner(a,u0,n):
    x=np.arange(0,n,1)
    y=[u(a,u0,k)for k in x]
    plt.plot(x,y,"+")
    plt.show()
```

5)• $a = 0.5$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

• $a = 1.5$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\frac{a-1}{a}$.

• $a = 2.2$, $u_0 = 0.8$ et $n = 20$: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ oscille, puis converge vers $\frac{a-1}{a}$.

• $a = 3.7$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge et possède un comportement chaotique.