

DS4 CUBES maths appli ECG2

28/01/2026

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.

b) Etablir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et que, pour tout réel $x > 0$, on peut écrire :

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

Indication (non fournie par l'énoncé initial) :

Introduire et identifier la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$.

Expliquer pourquoi φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et préciser $\varphi'(x)$.

b) Etudier les variations, puis le signe de g sur $[0, +\infty[$.

En déduire que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

3. a) Montrer que, pour tout réel t positif ou nul, on a :

$$\frac{t}{e^t + 1} \leq 1.$$

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Certaines questions ont été modifiées par rapport au sujet original.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer la matrice $A(A - 2I)^2$. En déduire les seules valeurs propres possibles de A .
- b) On considère les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que ce sont des vecteurs propres de A . En déduire les valeurs propres de A .

- c) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$, $v = (3, 1, -2)$ et $w = (-2, 0, 1)$.
 - a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w .
 - c) Conclure que la matrice de f dans la base (u, v, w) est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- d) Montrer que T n'est pas diagonalisable.
- e) A est-elle diagonalisable ?
3. On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) Déterminer N^2 , ND et DN .

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = D^n + nD^{n-1}N.$$

- b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n
- c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1} .
- d) Montrer l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PT^nP^{-1}.$$

- e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
-

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes :

- l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n ,
- l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[[1, n]]$.

Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X = k)$.

En distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, en déduire la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

4. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[[0, n]]$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- (b) Écrire, pour tout $i \in [[1, n]]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

5. (a) Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

6. (a) Établir que pour tout entier $n \geq 2$:

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

- (b) Montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 2$:

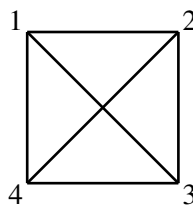
$$E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}$$

- (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$

- (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, $V(Y)$ en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 4

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire



Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets 1,2,3,4 de la figure ci-dessus selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

- 1) Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}.$$

- 2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .

- 3) a: A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)).$$

- b: Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- c: Justifier pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'égalité : $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$.

En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

- d: Établir alors que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- 4) a: En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- b: En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

- c: Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- 5) On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

- 6) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer l'espérance de X_n .

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R})$:

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

7) **a:** Grâce à la partie 1), montrer qu'en posant $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_{n+1} = U_n A$.

b: Établir par récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_n = U_0 A^n$.

c: En déduire la première ligne de A^n .

8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10) **a:** Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b: À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J .

c: Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique (revisitée par rapport au sujet d'origine)

11) On suppose importé le module `numpy.random` d'alias `rd`.

La fonction `choice` prend en paramètre une liste et renvoie au hasard et avec équiprobabilité un élément de cette liste.

a: A la fin du programme ci-dessous, que devient la liste `L` ? (préciser ses éléments).

```
L=[1,2,3,4]
L=[j for j in L if j!=2]
```

b: Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie la liste des sommets parcourus par le mobile de l'instant 0 à l'instant `n`.

```
def markov(n):
    X=[0]*(n+1)
    X[0]= .....
    for k in range(1,n+1):
        L=[1,2,3,4]
        L=[j for j in L if j!= .....]
        ..... =rd.choice(L)
    return X
```

- c:** Ecrire un programme permettant d'afficher le nombre r de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.
- d:** Après avoir exécuté cinq fois le programme 11)c), les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 sont : $r = 23$, $r = 28$, $r = 23$, $r = 25$, $r = 26$.
En quoi est-ce normal ?