Correction DS1

Exercice 1 :

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 4\mathrm{L}_2 - L_3 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

2) $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ puis $J^n = O$ pour tout $n \geq 3$

3) Soit E(n) l' énoncé : $A^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$

E(0) s'écrit : $A^0 = I$ ce qui est vrai.
Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons E(n) vrai.

$A^{n+1} = AA^n \underset{\text{HR}}{=} (J+I)\left(I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2\right) = JI + nJ^2 + \dfrac{n(n-1)}{2} J^3 + I^2 + nIJ + \dfrac{n(n-1)}{2} IJ^2$

Donc $A^{n+1} = J + nJ^2 + I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2 = I + (n+1)J + \left[\dfrac{n(n-1)}{2} + n\right]J^2$

$= I + (n+1)J + \dfrac{(n+1)n}{2} J^2$ donc E(n+1) est vrai.

On a donc $A^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$ pour tout entier $n \geq 0$

4) Pour n=-1, l'égalité 3) s'écrit : $A^{-1} = I - J + J^2$

Or $I - J + J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$

Donc l'égalité 3) est vraie pour n=-1.

Exercice 2 (ESC 1998 remanié) :

1) a) On a AB = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et BA = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ donc AB = BA.

Donc B appartient à E.

b) $AA^n = A^{n+1}$ et $A^n A = A^{n+1}$ donc $AA^n = A^n A$ donc A^n appartient à E.

2) Soit M = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{R})$.

M ϵ E <=> AM = MA

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a+c & b \\ e & d+f & e \\ h & g+i & h \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f=h=d=b \\ a+c=e \\ g+i=e \\ a+g=e \\ c+i=e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f=h=d=b \\ a+c=e \\ a=i \\ g=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Donc E = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \{a \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + b \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} + c \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{aI + bA + cB \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Donc E = Vect(I, A, B)

3) (I, A , B) est déjà une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre.

$$aI + bA + cB = O \iff a \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + b \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} + c \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

(I,A,B) est une famille libre et génératrice de E donc une base de E.

4)Soient $P = \begin{bmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\-2&0&2\\1&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}$

a) $PQ = \begin{bmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\-2&0&2\\1&\sqrt{2}&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix} = 4I$

Donc $P[\frac{1}{4} Q] = I$ ce qui prouve que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4} Q$

b) $D = P^{-1} AP = \frac{1}{4} \begin{bmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\-2&0&2\\1&\sqrt{2}&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix}-\sqrt{2}&2&-\sqrt{2}\\0&0&0\\\sqrt{2}&2&\sqrt{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Donc D = $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ qui est bien diagonale.

c) Soit E(n) l'énoncé : « $A^n = PD^nP^{-1}$ »
E(1) s'écrit : «$A = PDP^{-1}$» soit «$D = P^{-1} AP$» ce qui est vrai
Soit $n \geq 0$ un entier quelconque. Supposons E(n) vrai.

$A^{n+1} = AA^n \underset{HR}{=} (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Donc E(n+1) est vrai.

Donc pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = PD^nP^{-1}$

d) $$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2})^n & 0 & (\sqrt{2})^n \\ (-\sqrt{2})^{n+1} & 0 & (\sqrt{2})^{n+1} \\ (-\sqrt{2})^n & 0 & (\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \\ (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^{n+2}+(-\sqrt{2})^{n+2} & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} \\ (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n\right) I + \frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1}\right) A + \frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n\right) B$$

Donc les coordonnées de la matrice A^n dans la base (I , A , B) sont :

$$\left(\frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n\right) , \frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1}\right) , \frac{1}{4} \left((\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n\right) \right)$$

Exercice 3 :

1)a)On trouve $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

b)On vérifie que $A = PDP^{-1}$ et $B = PEP^{-1}$ ...

2)a)F n'est pas vide car la matrice nulle appartient à F du fait que AO=OB=O.
Soient M et M' deux matrices de F et soit a un réel.

$$\begin{aligned} A(aM+M') &= AaM+AM' \\ &= aAM + AM' \\ &= aMB + M'B \text{ car M et M' sont dans F} \\ &= (aM+M')B \end{aligned}$$

Donc aM+M' appartient à F, ce qui montre la stabilité de F par combinaison linéaire.
On conclut que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

2)b)
$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM = MB \\ &\iff (PDP^{-1})M = M(PEP^{-1}) \\ &\iff P^{-1}(PDP^{-1})MP = P^{-1} M(PEP^{-1})P \\ &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E \end{aligned}$$

2)c)Soit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$DX = XE \iff \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 9a & 9b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a & 3b \\ 9c & 3d \end{bmatrix}$$

$$\iff b = c = d = 0$$

Donc $DX = XE \iff X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où a réel qcq $\iff X = \frac{a}{9} D, a \in \mathbb{R} \iff X \in \text{Vect}(D)$

2)d)Partons de 2)c) :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E \\ &\iff P^{-1}MP \in \text{Vect}(D) \qquad \text{[en utilisant la question précédente avec } X = P^{-1}MP \text{]} \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ P^{-1}MP = \lambda D \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ P(P^{-1}MP)P^{-1} = P(\lambda D)P^{-1} \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ M = \lambda\,(PDP^{-1}) \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ M = \lambda A \\ &\iff M \in \text{Vect}(A) \end{aligned}$$

Donc F = Vect (A) .

A étant une matrice non-nulle, (A) est une famille libre de F . C'est aussi une famille génératrice de F par construction.
Donc (A) est une base de F et dim F = 1.

Exercice 4 :

1)a) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme différence et composée de fonctions dérivables.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type « $(+\infty)-(+\infty)$ ».

Transformons l'expression de $f(x)$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)\\
&= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\\
&= x - 2\ln x - \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\\
&= x\left(1 - 2\times\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right).
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2\times\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

On déduit par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\times\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} \ln x = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) $\forall x \in \mathbf{R},\ (x-1)^2 \geq 0$ et $1+x^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

Plus précisément, $\forall x \neq 1,\ f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$.

f est donc croissante sur $\mathbf{R}$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2)a) f' est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) &= \frac{2(x-1)(1+x^2) - 2x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{2(x-1)\big((1+x^2) - x(x-1)\big)}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

b) $f''(x)$ est du signe du trinôme $(x-1)(x+1)$ dont les racines sont -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont les réels où $f''(x)$ s'annule et change de signe, c'est-à-dire -1 et 1.

Les deux points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont donc $(1, 1-\ln 2)$ et $(-1, -1-\ln 2)$.

3)La tangente à $\mathscr{C}_f$ en (0,0) a pour coefficient directeur $f'(0) = 1$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(1, 1-\ln 2)$ a pour coefficient directeur $f'(1) = 0$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(-1, 1-\ln 2)$ a pour coefficient directeur $f'(-1) = 2$.