EXERCICE 1

On note I et A les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. a. Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
b. Déterminer une matrice P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$.
En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.
On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM .
7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. a. Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
b. En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
10. L'endomorphisme f est-il bijectif? diagonalisable?
11. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
12. a. Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
b. Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

EXERCICE 2

On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $]0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0; +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
 - b. Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
 - c. Tracer l'allure de C .
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , définie, pour tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
7. a. Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$

- b. Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e) .
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.)
12. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

EXERCICE 3

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4. a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.
b. En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbf{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I , $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y .
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f , où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n .

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. La question originale a été modifiée car elle était hors programme.

Soit U une variable aléatoire de fonction de répartition F_U , définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = e^{-e^{-x}}$.

- a. Montrer que U est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de U .
- b. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers U .