
DM3
à rendre le lundi / /

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x.$$

On rappelle que $2.7 < e < 2.8$.

1)a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.

1)b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et $+\infty$.
Préciser $f'(1)$.

2) Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et $+\infty$.
Préciser $f(1)$.

3) Tracer la courbe représentative de f et les éléments qui vous paraissent utiles.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs $v_1 = e_1$, $v_2 = f(e_1)$, $v_3 = e_3$ et $v_4 = f(e_3)$.

On note $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

1) Calculer v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

2)a) Déterminer P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

2)b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Que déduire pour $\mathcal{C}$?

3) Calculer C , matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

4) Montrer que $f \circ f = -\text{Id}$ où Id désigne l'application identique de $\mathbf{R}^4$.

5) Existe-t-il un réel λ et un vecteur u non nul de $\mathbf{R}^4$ tels que $f(u) = \lambda u$?