

Correction DM8

Exercice 1

1) f est de classe C^2 sur \mathbf{R} comme inverse d'une fonction C^2 ne s'annulant pas et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(2x)(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

$f''(x)$ est du signe de $6x^2 - 2$, de racines $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où le tableau de variations :

x	0	$1/\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+
$f'(x)$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	0

$$1+x^2 \underset{+ \infty}{\sim} x^2 \text{ donc } (1+x^2)^2 \underset{+ \infty}{\sim} x^4, \text{ puis } f'(x) \underset{+ \infty}{\sim} \frac{-2}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^3} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

$$\text{De plus, } f'(1/\sqrt{3}) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Le tableau de variations donne } \forall x \geq 0, -\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq f'(x) \leq 0, \text{ puis } |f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

2) • g est dérivable sur \mathbf{R}_+ comme différence de fonctions dérивables et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = f'(x) - 1$.

$$\forall x \geq 0, f'(x) \leq 0 \text{ donc } g'(x) \leq -1 < 0.$$

Donc g est strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ .

• g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ , elle réalise donc une bijection de \mathbf{R}_+ sur $g(\mathbf{R}_+) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right] =]-\infty, 1]$.

$0 \in]-\infty, 1]$ admet donc un unique antécédent α par g .

Aussi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \geq 0$.

• De plus, $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \geq 0$.

• Enfin, $g(0,6) = f(0,6) - 0,6 > 0$, $g(\alpha) = 0$ et $g(0,7) = f(0,7) - 0,7 < 0$.

Donc $g(0,7) < g(\alpha) < g(0,6)$, puis $0,6 < \alpha < 0,7$ par stricte décroissance de g .

3) $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{1+U_n^2} \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$.

De plus, $U_0 \geq 0$ par énoncé. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$.

4) f est dérivable sur \mathbf{R}_+ et $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, quels que soient les réels a et b de \mathbf{R}_+ :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |b - a|.$$

Prenons $a = \alpha$ et $b = U_n$. Ce choix est légitime puisque a et U_n sont dans \mathbf{R}_+ .

$$\text{On obtient alors : } |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |U_n - \alpha|.$$

Or, $f(\alpha) = \alpha$ et $f(U_n) = U_{n+1}$.

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |U_n - \alpha|.$$

5) • Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $|U_0 - \alpha| \leq |U_0 - \alpha|$ », ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\text{La question 4) donne : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |U_n - \alpha| \quad (*)$$

L'hypothèse de récurrence donne : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$, puis en multipliant membre à membre par $\frac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha| \quad (**)$$

$$\text{En recollant } (*) \text{ et } (**), \text{ on déduit : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\text{On conclut que } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|.$$

• On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1 \text{ et } |U_0 - \alpha| \text{ est une constante.}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0.$$

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(U_n, \alpha) = 0$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

Exercice 2 (extrait edhec 2014)

1) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ est continue sur \mathbf{R} par composée et inverse de

fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Elle admet donc une primitive sur \mathbf{R} , ce qui donne un sens à l'intégrale.

Donc φ est bien définie sur \mathbf{R} .

$$\begin{aligned} 2) \forall x \in \mathbf{R}, \varphi(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2 + 1}} (-du) \quad \text{en posant } u = -t \\ &= - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du \\ &= -\varphi(x). \end{aligned}$$

Donc φ est impaire.

3) Notons F une primitive de f sur \mathbf{R} .

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi(x) = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x).$$

F est dérivable sur \mathbf{R} et $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = f(x)$.

f étant continue sur \mathbf{R} , F' l'est aussi.

Ainsi, F est de classe C^1 sur \mathbf{R} .

φ est alors de classe C^1 sur \mathbf{R} par composée et différence de fonctions C^1 .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

4)a) Les inégalités $\forall t \geq 0, t^2 \leq t^2 + 1 \leq (t + 1)^2$ donnent :

$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq \sqrt{(t + 1)^2}$, par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbf{R}_+ ,

c'est-à-dire $t \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq t + 1$,

puis $\frac{1}{t + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbf{R}_+^* .

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes¹ x et $2x$, on obtient :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$[\ln(t+1)]_x^{2x} \leq \varphi(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln(2x) - \ln(x).$$

$$\text{Donc } \forall x > 0, \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln 2.$$

1. car $x > 0$

$$4)b) \forall x > 0, \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2, \text{ puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln 2.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) = \ln 2.$$

$$\text{La question 4)a) donne alors grâce à la propriété des gendarmes : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln 2.$$

$$\begin{aligned} 4)c) \varphi'(x) > 0 &\iff 2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \\ &\iff 2\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{4x^2 + 1} \\ &\iff (2\sqrt{x^2 + 1})^2 > (\sqrt{4x^2 + 1})^2 \quad \text{par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+ \\ &\iff 4(x^2 + 1) > 4x^2 + 1 \\ &\iff 4 > 1. \end{aligned}$$

ce qui est vrai donc $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) > 0$.

φ est donc strictement croissante sur \mathbf{R} .

Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\ln 2$ car φ est impaire et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln 2$.

D'où le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\ln 2$	$\ln 2$

4)d) φ est continue et strictement croissante sur \mathbf{R} donc réalise une bijection de \mathbf{R} sur $\varphi(\mathbf{R}) = [-\ln 2, \ln 2]$.

$0 \in [-\ln 2, \ln 2]$ admet donc un unique antécédent par φ .

Donc φ s'annule une et une seule fois.

$$\text{Or, } \varphi(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = 0.$$

Donc l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ est $x = 0$.