Corrigé révisions - séance 6

1)eml 2019 $\mathbf{f(x) = x + \frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

- $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ *(on met au même dénominateur)*
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. *Par somme,* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. *Par somme,* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	*2*	$\nearrow$	$+\infty$

2)eml 2018 $\mathbf{f(x) = x - \ln x}$ *sur* $]0, +\infty[$.

- $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - 1}{x}$ *(on met au même dénominateur)*
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ *Par différence,* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. *Par différence,* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = FI$

Quand $x \to +\infty$, *on transforme donc l'expression de* $f(x)$ *en factorisant :*

$f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *(croissances comparées) donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	*1*	$\nearrow$	$+\infty$

3)ecricome 2015 $\mathbf{f(x) = xe^{-x}}$ *sur* $]0,+\infty[$.

- $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ *(on factorise)*
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$ *Par produit,* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ *Par produit,* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = FI$

Quand $x \to +\infty$, *on transforme donc l'expression de* $f(x)$ *en écrivant :*

$f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ *, on conclut par croissances comparées :* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4)eml 2012 $\mathbf{f(x) = x\ln x}$ *sur* $]0,+\infty[$.

- $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
- $f'(x) \geq 0 \iff \ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. *Par produit,* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = FI$

Cependant, par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ *Par produit,* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5)eml 2016 $\mathbf{f(x) = x^2 - x\ln x}$ *sur* $]0, +\infty[$.

- $f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}\right) = 2x - \ln x - 1$

- $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$ *(on met au même dénominateur)*

- $f''(x) \geq 0 \iff 2x - 1 \geq 0 \iff 2x \geq 1 \iff x \geq \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ *et par croissances comparées,* $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Par différence, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ *Par différence,* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = FI$

Quand $x \to +\infty$*, on transforme donc l'expression de* $f(x)$ *en factorisant :*

$f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{x \ln x}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *(croissances comparées) donc* $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) > 0$	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6)eml 2015 $\mathbf{f(x) = x^2e^x - 1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$ *(on factorise)*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. *Par produit,* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. *Par produit,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = FI$

Cependant, par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$4e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7)ecricome 2016 $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}}$ *sur* $]-1,+\infty[$.

- $f'(x) = \left((1+x)^{-2}\right)' = -2(1+x)^{-3} = -\dfrac{2}{(1+x)^3}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^2 = +\infty$. *Par inverse,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to-1^+} (1+x)^2 = 0^+$. *Par inverse,* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0