DS3 CUBES - 17/12/2025

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in\,]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ converge et la calculer.

b) A l'aide d'un changement de variable, en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. ***a)*** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 2

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ I'cnsemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :
   $$f(M) = \left({}^tA\right) M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les quatre matrices :
   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

4. (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

   (c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. Questions 5)b) et 5)c) modifiées par rapport au sujet original.

   (a) Écrire la matrice F de f dans la base B.
   On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.

   (b) En déduire les valeurs propres de F.

   (c) Determiner le rang de F et le rang de $F + I$. La matrice F est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.
2. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$
3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$
   a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :
   $$I_{n+2} = (n+1)\, I_n$$
   b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :
   $$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
   c) Donner la valeur de I_1
   d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$
4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :
   $$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
   b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.
      i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et préciser sa valeur
      ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$ et préciser sa valeur.
5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$.
   a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$.
   b) En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$.