Chapitre 1 : espaces vectoriels

I)Espace vectoriel

Déf : un *espace vectoriel* E est un ensemble d'objets, appelés *vecteurs* que l'on peut additionner entre eux avec l'opération $\ll + \gg$, que l'on peut multiplier par un nombre réel avec l'opération $\ll . \gg$ et satisfaisant les règles suivantes :

R1) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$ (*stabilité* pour $\ll + \gg$)

R2) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda.\overrightarrow{u} \in E$ (*stabilité* pour $\ll . \gg$)

R3) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (*symétrie*)

R4) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall \overrightarrow{w} \in E, (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (*associativité*)

R5)Il existe un vecteur nul, noté $\overrightarrow{0_E}$ tel que $\forall \overrightarrow{u} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

R6) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists \overrightarrow{u'} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$

R7) $\forall \overrightarrow{u} \in E, 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

R8) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$ (*distributivité*)

R9) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$ (*distributivité*)

R10) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \lambda.(\mu.\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{u}$

Remarques

1)$\forall \overrightarrow{u} \in E, 0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$

2)$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda.\overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$

3)$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \overrightarrow{u} \in E,\ \lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E} \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$

4)Dans la règle R6, on a : $\overrightarrow{u'} = (-1).\overrightarrow{u}$ que l'on notera $-\overrightarrow{u}$.

Exemples

1)$E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et en particulier $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

2)$E = \mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n), x_1 \in \mathbf{R}, ..., x_n \in \mathbf{R}\}$ car on peut l'identifier à l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ des matrices à 1 ligne et n colonnes.

3)$E = \mathbf{R}[X] = \{\text{polynômes}\}$ ou $E = \mathbf{R}_n[X] = \{\text{polynomes de degré} \leq n\}$.

4)$E = \{\text{fonctions de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}\}$.

Contre-exemples

1)$E = \{\text{matrices inversibles de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R})\}$ n'est pas un espace vectoriel car la stabilité fait défaut pour $\ll + \gg$.

En effet, $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ appartiennent à E, alors que $u + v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E.

2)$E = \{\text{fonctions positives de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel car la stabilité fait défaut pour $\ll . \gg$.

En effet, si $f \in E$, alors $\lambda.f \notin E$ pour $\lambda < 0$.

II)Combinaison linéaire

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E est *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ s'il existe des réels $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que $\overrightarrow{u}=\lambda_1.\overrightarrow{u_1}+...+\lambda_n.\overrightarrow{u_n}$.

Exercice 1
$E=\mathbf{R}^2$, $\overrightarrow{u_1}=(1,2)$, $\overrightarrow{u_2}=(2,-3)$ et $\overrightarrow{u}=(4,5)$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Exercice 2
$E=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}$.
Montrer que U est combinaison linéaire de A, B et C.

Exercice 3
Soit $u=(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la donnée de U_0 et U_1 ainsi que par l'égalité $\forall n\in\mathbf{N}, U_{n+2}-5U_{n+1}+6U_n=0$.
Montrer que u est combinaison linéaire de deux suites géométriques.

III)Sous-espace vectoriel

Déf : soit E un espace vectoriel.
On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est une partie non-vide de E,
- $\forall\overrightarrow{u}\in F, \forall\overrightarrow{v}\in F, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\in F$ (*stabilité* de F pour $\ll+\gg$),
- $\forall\lambda\in\mathbf{R}, \forall\overrightarrow{u}\in F, \lambda.\overrightarrow{u}\in F$ (*stabilité* de F pour $\ll.\gg$).

Ou, ce qui est équivalent :

- F est une partie non-vide de E,
- $\forall\lambda\in\mathbf{R}, \forall\overrightarrow{u}\in F, \forall\overrightarrow{v}\in F, \lambda.\overrightarrow{u}+.\overrightarrow{v}\in F$ (*stabilité* de F par CL).

Propriété 1
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est lui-même un espace vectoriel et contient $\overrightarrow{0_E}$.

Exercice 4
$E=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $A\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $F=\{M\in E\mid AM=M\}$. Mq F est un sev de E.

IV)Sous-espace vectoriel engendré

Propriété 2
Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ et noté $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$.
Déf : on a donc $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=\{\lambda_1.\overrightarrow{u_1}+...+\lambda_n.\overrightarrow{u_n},(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbf{R}^n\}$.

Propriété 3
Soit E un espace vectoriel, $n\in\mathbf{N}^*$ et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
1)Quels que soient les réels non nuls $a_1,...,a_n$: Vect $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=$ Vect $(a_1\overrightarrow{u_1},...,a_n\overrightarrow{u_n})$.
2)Si $\overrightarrow{u_n}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_{n-1}}$: Vect $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=$ Vect $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_{n-1}})$.
3)Vect $\left(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n},\overrightarrow{0_E}\right)=$ Vect $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$.

Exercice 5
On donne $E=\mathbf{R}^3$ et $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid 2x-y+3z=0\right\}$.
Montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $F=Vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$.

V)Famille génératrice

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur u de E est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$.

Théorème 1
$(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ est une famille génératrice de $E \iff E = Vect\,(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$.

Exercice 6
On donne $E = \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a \\ c & 2c & a \\ b & b+c & b-c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

1)Montrer qu'il existe des matrices U_1, U_2 et U_3 telles que $F = Vect\,(U_1,U_2,U_3)$.

2)Que peut-on conclure pour F ? Que peut-on dire de la famille (U_1,U_2,U_3) ?

VI)Famille libre

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ est *libre* si quels que soient les réels λ_1, ... , λ_n, on a :

$$\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

On dit que $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ est une famille liée de E si elle n'est pas libre, donc s'il existe des réels λ_1, ... , λ_n **non tous nuls** tels que $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$.

Déf : soit E un espace vectoriel, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou s'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}$.

Propriété 4
1)$(\overrightarrow{u})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
2)$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 7
On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{u_3} = (1,2,2)$, $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,2,1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (2,-4,-3)$.

1)Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ est libre.

2)Montrer que $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est liée, et que $\overrightarrow{v_3}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Théorème 2
Une famille est liée si et seulement si il existe un vecteur de la famille qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Remarque
Toute famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée.

VII)Base d'un espace vectoriel

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ est une *base* de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$.

Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ de réels tel que $\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n}$
$(\lambda_1,...,\lambda_n)$ sont appelées *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$.

$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée *vecteur colonne* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Théorème 3
Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
$(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une base de E si et seulement elle est libre et génératrice pour E.

Exercice 8
On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-2, 0, 5)$, $\overrightarrow{u_3} = (-4, 4, 9)$.
Déterminer une base de $F = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

VIII)Dimension

Déf : on dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* s'il possède une base formée d'un nombre fini de vecteurs.

Propriété 5
Tout espace vectoriel E de dimension finie admet une multitude de bases. Toutes ces bases ont une caractéristique commune : elles ont le même nombre de vecteurs.

Déf : soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Le nombre de vecteurs de $\mathscr{B}$ est appelée *dimension* de E et notée $dim\ E$.

> Remarque
> On convient que $dim \left\{ \overrightarrow{0} \right\} = 0$.

Théorème 4
1)$dim\ \mathbf{R}^n = n$.
2)$dim\ \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}) = np$.
3)$dim\ \mathbf{R}_n\,[X] = n + 1$.

Théorème 5 (coïncidence cardinal/dimension)
Soit E un espace vectoriel de dimension connue n.
Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème 6 (plus rarement utilisé)
Soit E un espace vectoriel de dimension connue n.
Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

Exercice 9
$\overrightarrow{u_1} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 3)$. Mq $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Propriété 6
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.
Alors, F est de dimension finie et $dim\ F \leq\ dim\ E$.

Propriété 7
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sev de E.
Si $F \subset G$ et si $dim\ F = dim\ G$, alors $F = G$.

IX)Base canonique

Les espaces vectoriels de dimension finie les plus courants possedent une base particulièrement simple, appelée *base canonique*.

Déf : pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on note $\overrightarrow{e_i} = (0,...,0,1,0,...,0)$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la ième qui est égale à 1.
La famille $(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ est appelée base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Déf : pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout entier $j \in [\![1,p]\!]$, on note e_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la ième ligne et la jième colonne qui vaut 1.
La famille (e_{ij}) est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

Déf : pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, on note $e_i = X^i$.
La famille $(e_0, e_1, ..., e_n)$ est appelée base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

X)Matrice de passage

Déf : soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1},...,\overrightarrow{e'_n})$, une famille de n vecteurs de E.
On appelle *matrice de passage* de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e'_j}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 7
soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1},...,\overrightarrow{e'_n})$, une famille de n vecteurs de E.
Alors, $\mathscr{B}'$ est une base de $E \Longleftrightarrow P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible .
Et on a alors : $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Théorème 8 (formule de changement de base pour les vecteurs colonnes)
Soit E un espace vectoriel. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de vecteurs colonnes U et U' dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a alors la formule :

$$U = PU' \text{ où } P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Exercice 10
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2},\overrightarrow{e'_3})$ la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ définie par :
$\overrightarrow{e'_1} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{e'_2} = (2,1,-1)$ et $\overrightarrow{e'_3} = (1,-1,1)$.

1)Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2)Montrer que P est inversible et préciser son inverse. Que conclure pour $\mathscr{B}'$?

3)Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$ dans $\mathscr{B}$, puis dans $\mathscr{B}'$.

Réponses :
$1)P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $2)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$
$3)(1,2,3)$ et $\left(5, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

Exercice 11
Soit $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ où $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.
Soit $\mathscr{B}' = (e'_0, e'_1, e'_2)$ la famille de polynômes de $\mathbf{R}_2[X]$ définie par :
$e'_0 = X^2 + 2X$, $e'_1 = 2X^2 + X + 1$ et $e'_2 = 3X^2 - X + 2$.

1)Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2)Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Que conclure pour $\mathscr{B}'$?

3)Déterminer les coordonnées de $u = X^2 - 3X + 4$ dans $\mathscr{B}$, puis dans $\mathscr{B}'$.

Réponses :
$1)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $2)P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$3)(4, -3, 1)$ et $(-14, 18, -7)$.

XI)Rang d'une famille de vecteurs

Déf : soient $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle *rang* de la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, notée $rg\,(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, l'entier défini par :

$$rg\,(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}) = dim\text{Vect}\ (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}).$$

Propriété 8
Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est libre, son rang vaut n.
Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est liée, son rang est strictement inférieur à n.

Exercice 12
Soient $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, 1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 0, 1, 3)$ et $\overrightarrow{u_4} = (4, 1, 2, 5)$.
Quel est le rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$?

XII)Rang d'une matrice

Déf : soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
Soient $C_1, ..., C_p$ les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ relatives aux colonnes de A.
On appelle *rang* de la matrice A, notée $rg(A)$, l'entier défini par :

$$rg(A) = rg(C_1, ..., C_p).$$

Propriété 9
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Alors, $rg(A) = rg\,({}^tA)$.

Propriété 10
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors, A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Propriété 11
Le rang d'une matrice est invariant par les opérations de Gauss.

Exercice 13
Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.