

EXERCICE 1**Partie I- Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre**

On considère l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} -t \ln(t) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_x^1 g(t) dt$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ converge et que $\int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{4}$.

Partie II- Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t \ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?
2. Etablir que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
3. Montrer que f est une densité.
4. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, 1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$.
(b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0, 1[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
(c) Informatique.

On suppose importé le module `numpy` d'alias `np`.

On appelle `fprime` la fonction de paramètre t réel et renvoyant la valeur de $f'(t)$.

Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
import numpy as np
def fprime(t):
    y=.....
    return y
a=1/np.exp(1)
b=1
while b-a ..... :
    c=(a+b)/2
    if fprime(c)<0:
        .....
    if fprime(c)>0:
        .....
print(c)
```

Partie III- Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie II) et on note F la fonction de répartition de X .

1. Calculer, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_x^1 f(t)dt$ (utiliser le résultat obtenu à la question I.2.)
2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de F .

Partie IV- Etude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tels que $x + y < 1$ et $2x < 1$.

On considère l'application $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert D , définie par :

$$\forall (x, y) \in D, G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}f(2x)$$

1. Représenter l'ensemble D .
2. Justifier soigneusement que G est de classe C^1 sur D , puis calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y) , en fonction de x, y et f' .
3. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$f'(2x) = 0 \text{ et } f'(x + y) = 0$$

4. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en II 4.b..
5. Est-ce que G admet un extremum local?

EXERCICE 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A , déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1} .

On appelle commutant de A , et on note C_A , l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$AM = MA.$$

On appelle commutant de D , et on note C_D , l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$DN = ND.$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \iff N \in C_D$$

6. Déterminer C_D , en utilisant les coefficients des matrices.
7. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A .

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 - (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
 - (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k .

Partie II

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2 .
En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
 - (a) Déterminer $P(Z_k = 1)$
 - (b) Déterminer $P(Z_k = k)$.
 - (c) Montrer, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}P(Z_k = \ell - 1)$.
 - (d) En déduire : $E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1$.
3. (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
(b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $E(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k .

1. Rappeler la valeur de $P(Z_k = 1)$. Déterminer $P(Z_k \geq 5)$.
2. Montrer : $P(Z_k = 2) = 6 \frac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, A_i l'événement :
" la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages".

(a) Montrer : $P(Z_k \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Indication : on pourra utiliser la formule du crible à 4 parties ci-dessous

$$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq 4} A_i\right) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq 4} A_i\right)$$

(b) Calculer $P(A_1)$, $P(A_1 \cap A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

(c) En déduire : $P(Z_k \leq 3)$, puis $P(Z_k = 3)$ et $P(Z_k = 4)$.