Em Lyon 2014

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Etudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x \to 0^+$.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
5. On admet que $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
   Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
   On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0.

Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0;+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.
9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).
10. Etablir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :
    $$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0$$
11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1,e)$.
12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1,e)$?
13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$ (utiliser les résultats de la partie I).
15. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
16. Ecrire un programme en Python qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 2

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que ε est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de ε.
2. Etablir que ε est stable par multiplication, c'est-à-dire :
$$\forall (M, N) \in \varepsilon^2, MN \in \varepsilon$$
3. Montrer que, pour toute matrice M de ε, si M est inversible alors $M^{-1} \in \varepsilon$.

   Pour toute matrice de ε, on note $f(M) = TMT$.
4. Montrer que f est un endomorphisme de ε.
5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de ε.
6. Est-ce que T est diagonalisable ?
   On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de ε.
7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.
8. Montrer que F admet une valeur propre et une seule. Déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de F associé à cette valeur propre.
9. Est-ce que F est diagonalisable ?
10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \varepsilon$.

    Dans toute la suite, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.
12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.
13. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$. Existe-t-il un endomorphisme g de ε tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$.

Exemple : si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'évenement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathrm{P}(X_3 = 4)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathrm{P}(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $\mathrm{P}(X_n = n+1)$.
5. Montrer, pour tout i de $[\![1; n]\!]$: $\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $\mathrm{P}(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.
   En déduire que $\mathrm{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $\mathrm{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathrm{P}(X_n > k-1)$ et de $\mathrm{P}(X_n > k)$.
9. En déduire : $\mathrm{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n > k)$. Calculer ensuite $\mathrm{E}(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in [\![[2; n+1]\!], \mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

    On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2; +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2; +\infty[\![, \mathrm{P}(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathrm{E}(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n)$.