DM9
à rendre le lundi / /

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + 1 + 2e^x.$$

Et la fonction g de deux variables définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x).$$

1)Etudier les variations de f et donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2)Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

3)Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel $\alpha \in [-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (On rappelle que $e \approx 2,7$).

4)Déterminer le seul point critique de g.

5)Montrer que g présente un extrémum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

6)Etablir que $4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction g_n sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0,\ g_n(x) = \frac{\big(\ln(1 + x)\big)^n}{(1 + x)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

1)Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

2)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ g_n(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

3)Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

4)A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} = (n + 1)I_n.$$

5)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ I_n = n!$