Exercice 1 (eml 2009)

Partie I

1)a)f est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient et différence de fonctions continues.

De plus, le cours donne : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

On conclut que f est continue sur $\mathbf{R}$.

b)f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient et différence de fonctions C^1.

$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$.

c)$\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \dfrac{x - e^x + 1}{x\,(e^x - 1)}$.

Or, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $x\,(e^x - 1) \underset{0}{\sim} x^2 \quad (1)$

De plus, le DL de cours donne : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, c'est-à-dire :

$x - e^x + 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} - o(x^2)$, ce qui mène à : $x - e^x + 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \quad (2)$

Par quotient de (1) et (2) : $\dfrac{x - e^x + 1}{x\,(e^x - 1)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2)a)u est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit et différence de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R},\ u'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$, du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

b)D'après le tableau de variations de u, on a $\forall x \neq 0,\ u(x) < 0$.

De plus, on remarque que $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$.

Donc $\forall x \neq 0,\ f'(x) < 0$.

Par ailleurs, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Finalement, on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) < 0$.

c)• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Quand $x \to +\infty$, on écrit : $f(x) = \dfrac{x}{e^x\,(1-e^{-x})} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-e^{-x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On a vu que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

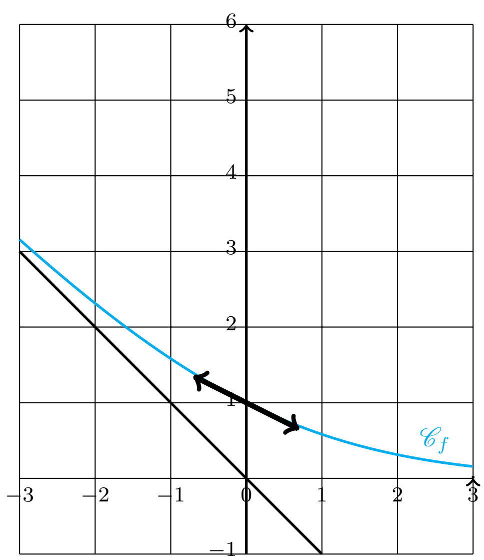
d)$\forall x < 0,\ f(x) - (-x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + x = \dfrac{x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + x) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

e)



Partie II

1)Pour tout $x \neq 0$, on a :

$f(x) = x \iff \dfrac{x}{e^x - 1} = x \iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2.$

De plus, $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe.

Finalement, l'unique point fixe de f est $\alpha = \ln 2$.

2)a)Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par : $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0,\ g'(x) = 2e^{2x} - 2\left(e^x + xe^x\right) = 2e^x\left(e^x - x - 1\right)$.

De plus, la fonction exponentielle étant convexe, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes donc en particulier au-dessus de sa tangente en 0.
Or, l'équation de la tangente en 0 est : $y = x + 1$.
On a ainsi $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x + 1$.

On déduit que $\forall x \geq 0,\ g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.

Et comme $g(0) = 0$, on a finalement $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

On conclut que $\forall x \geq 0,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

b)En utilisant le calcul de $f'(x)$ fait en I)1)b), on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\big((1-x)e^x - 1\big) + \left(e^x - 1\right)^2}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

c)La question I)2)b) donne déjà : $\forall x \geq 0,\ f'(x) < 0$.

Des questions II)2)a) et II)2)b), on déduit : $\forall x > 0,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0$,

c'est-à-dire $\forall x > 0,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x)$.

Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$ puisque $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Finalement, on a bien $\forall x \geq 0,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d)f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de $[0, +\infty[$, on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a| \quad (*)$$

Prenons $a = \alpha$ et $b = u_n$.

On a bien $\alpha \in [0, +\infty[$ puisque $\alpha = \ln 2$.

De plus, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \in [0,+\infty[$ car $u_n = f(u_{n-1})$ et f est positive.
Et comme $u_0 \geq 0$ par énoncé, on a même $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in [0,+\infty[$.
On remplaçant dans $(*)$ a et b par les valeurs qu'on a choisies, on obtient :
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
Par construction, on a : $f(u_n) = u_{n+1}$.
De plus, $f(\alpha) = \alpha$ puisque α est un point fixe de f.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
3)Récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $|u_0 - \alpha| \leq (1-\alpha)$ ».
Or, $u_0 - \alpha = 1 - \ln 2 > 0$ donc $|u_0 - \alpha| = u_0 - \alpha = 1 - \alpha$. Et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par HR, on a : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
En multipliant membre à membre l'inégalité par $\dfrac{1}{2}$, on a :
$\dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.
Puis, en recollant avec l'inégalité II)2)d) : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
4)On sait que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$.
Cela signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
5)programme :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x/(np.exp(x)-1)
    return y
u=1
n=0
while np.abs(u-np.log(2))>10**-9:
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Python renvoie $n = 21$.

Partie III

1)f est continue sur $\mathbf{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbf{R}$.

On a alors $\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = \big[F(t)\big]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$.

F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ car F est dérivable et $F' = f$ est continue.

$x \mapsto 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Par composée, $x \mapsto F(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Par différence, G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

$$\begin{aligned}\text{On déduit : } \forall x \neq 0,\ G'(x) &= 2 \times \frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x - 1}\\ &= \frac{4x}{(e^x+1)(e^x-1)} - \frac{x}{e^x-1}\\ &= \frac{4x - x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x-1)}\\ &= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}.\end{aligned}$$

Enfin, $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

2)a)• Soit $x \geq 0$. On a alors : $x \leq 2x$.

f est positive sur $[x, 2x]$. Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \geq 0$, c'est-à-dire $G(x) \geq 0$.

Par ailleurs, f est décroissante sur $\mathbf{R}$ donc sur $[x, 2x]$.

On a alors : $\forall t \in [x, 2x],\ f(t) \leq f(x)$.

En intégrant entre les bornes croissantes x et $2x$:

$$\int_x^{2x} f(t)dt \leq \int_x^{2x} f(x)dt$$

C'est-à-dire : $G(x) \leq f(x) \displaystyle\int_x^{2x} 1dt$, avec $\displaystyle\int_x^{2x} 1dt = \big[t\big]_x^{2x} = 2x - x = x$.

Donc $G(x) \leq xf(x)$.

On conclut que $\forall x \geq 0,\ 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.

• L'inégalité ci-dessus s'écrit $\forall x \geq 0,\ 0 \leq G(x) \leq \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

$e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x$ donc $\dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{e^x}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

b)• Soit $x \leq 0$. On a alors $2x \leq x$.

Toujours par décroissante de f sur $[x, 2x]$, on a : $\forall t \in [2x, x],\ f(t) \geq f(x)$.

En intégrant entre les bornes croissantes $2x$ et x :

$\displaystyle\int_{2x}^x f(t)dt \geq \int_{2x}^x f(x)dt$, puis $-\displaystyle\int_{2x}^x f(t)dt \leq -\int_{2x}^x f(x)dt$, ce qui donne par antisymétrie de l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \leq \int_x^{2x} f(x)dt$.

C'est-à-dire : $G(x) \leq xf(x)$ en reprenant le calcul effectué à la question III)2)a).

• On a donc $\forall x \leq 0,\ G(x) \leq \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$.

Par passage à la limite, $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

3)On étudie le signe de $G'(x)$ qu'on a calculée en III)1).

$3 - e^x \geq 0 \iff e^x \leq 3 \iff x \leq \ln 3$.

$e^{2x} - 1 \geq 0 \iff e^{2x} \geq 1 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	

On déduit finalement le tableau de variations de G :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Exercice 2 (eml 2009)

Partie I

1)$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède une colonne de zéros donc $rg(A) < 3$.
Donc A n'est pas inversible.

2)A est triangulaire. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 0, 1 et 4.
$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes. Donc elle est diagonalisable.

3)• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_0(A) \Longleftrightarrow AU = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow y = z = 0$.

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_1(A) \Longleftrightarrow (A - I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$.

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_4(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 4I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_4(A) \Longleftrightarrow (A - 4I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x + y + 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$.

Donc $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice dont les colonnes sont formées d'une base de chaque sous-espace propre.
Comme A est diagonalisable, elle s'écrit : $A = PDP^{-1}$.

• Déterminons P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II

1)Remarquons d'abord que $N = P^{-1}MP \Longleftrightarrow M = PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Longleftrightarrow \left(PNP^{-1}\right)\left(PNP^{-1}\right) = PDP^{-1} \\ &\Longleftrightarrow PN\underbrace{P^{-1}P}_{=I}NP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\Longleftrightarrow PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \underbrace{P^{-1}P}_{=I}N^2\underbrace{P^{-1}P}_{=I} = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I} \\ &\Longleftrightarrow N^2 = D. \end{aligned}$$

2)Supposons $N^2 = D$. Alors, $ND = NN^2 = N^3 = N^2N = DN$.

3)Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Supposons $N^2 = D$. On a alors $ND = DN$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } ND = DN &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4c = 0 \\ d = 0 \\ 4f = f \\ 4g = 0 \\ 4h = h \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si $ND = DN$, alors $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ donc diagonale.

4)Soit $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

$$N^2 = D \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ i^2 = 4 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} a = 0 \\ e = \pm 1 \\ i = \pm 2 \end{array} \right.$$

Les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$ sont donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5)Soit M est solution de l'équation (1), alors M est de la forme $M = PNP^{-1}$, où N est l'une des 4 matrices trouvées précédemment.

M et N étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres.
Or, on veut que les valeurs propres de M soient positives ou nulles.

Cela impose que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Et on a alors :

$$\begin{aligned} M &= PNP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que la matrice M trouvée vérifie $M^2 = A$.

Ainsi, la matrice B cherchée est unique et vaut $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie III

1)Posons $Q(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 1 - a \\ 16a + 4(1 - a) = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} c = 0 \\ b = \dfrac{7}{6} \\ a = -\dfrac{1}{6} \end{array} \right.$$

Donc $Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X$.

2)En utilisant que $A = PDP^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A &= -\frac{1}{6}\left(PDP^{-1}\right)^2 + \frac{7}{6}PDP^{-1} \\
&= -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} \\
&= P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} \\
&= PQ(D)P^{-1} \quad (*)
\end{aligned}$$

Or, D est diagonale, D^2 également. Donc $Q(D)$ est diagonale.

Comme $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a : $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = B \qquad \text{(voir calcul fait en II.5)}$$

3)On procède par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $AF = FA$. Alors, $A^2F = AAF = AFA = FAA = FA^2$.

$$\begin{aligned}
\text{On déduit : } BF &= \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F \\
&= -\frac{1}{6}A^2F + \frac{7}{6}AF \\
&= -\frac{1}{6}FA^2 + \frac{7}{6}FA \\
&= F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right) \\
&= FB.
\end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $BF = FB$. On utilise que $B^2 = A$.

Alors, $AF = B^2F = BBF = BFB = FBB = FB^2 = FA$.

On conclut que $AF = FA \Longleftrightarrow BF = FB$.

Exercice 3 (eml 2009)

Partie I :

1)L'expérience aléatoire est constituée d'épreuves successives, identiques et indépendantes (l'indépendance provenant de la remise).
T représente le rang d'obtention du premier succès (succès=noire) où la probabilité de succès à chaque épreuve vaut q. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$.
On a donc $T(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(T = k) = p^{k-1}q$.
Enfin, le cours donne : $E(T) = \dfrac{1}{q}$ et $V(T) = \dfrac{p}{q^2}$.

2)On a déjà $U(\Omega) = \mathbf{N}$.
Puis, $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ T = k \iff U = k - 1$, puisque $(T = k)$ est réalisé ssi les $k - 1$ premières boules sont blanches et la k-ième est noire. Donc $U = T - 1$.
Comme T admet une espérance et que U est une fonction affine de T, on conclut que U admet une espérance donnée par :
$E(U) = E(T - 1) = E(T) - 1 = \dfrac{1}{q} - 1 = \dfrac{1 - q}{q} = \dfrac{p}{q}$.
De même, U admet une variance donnée par :
$V(U) = V(T - 1) = V(T) = \dfrac{p}{q^2}$, grâce à la formule : $V(aT + b) = a^2V(T)$.

Partie II :

1)a)On remarque déjà que $X(\Omega) = [\![2, +\infty]\!]$.
Pour tout $k \geq 2$, l'événement est $(X = k)$ est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k$ et $N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k$.
Donc pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P\left(B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k\right) + P\left(N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k\right) \\
&= P(B_1) \cdots P(B_{k-1})P(N_k) + P(N_1) \cdots P(N_{k-1})P(B_k) \quad \text{par indépendance} \\
&= p \times \cdots \times p \times q + q \times \cdots \times q \times p \\
&= qp^{k-1} + pq^{k-1}.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left(qp^{k-1} + pq^{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} qp^{k-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= qp\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-2} + pq\sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-2} \\
&= qp\sum_{n=0}^{+\infty} p^n + pq\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{en posant } n = k - 2 \\
&= qp \times \frac{1}{1 - p} + pq \times \frac{1}{1 - q} \\
&= 1 \quad \text{en utilisant que } p + q = 1.
\end{aligned}$$

c)X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à montrer la convergence de la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ puisque $\forall k\geq 2,\ kP(X=k)\geq 0$.
Pour tout entier $n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=2}^{n} \left(kqp^{k-1}+kpq^{k-1}\right)\\ &= q\sum_{k=2}^{n} kp^{k-1}+p\sum_{k=2}^{n} kq^{k-1}\\ &= q\left(\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}-1\right)+p\left(\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}-1\right)\end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}=\frac{1}{(1-p)^2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$ car ce sont des sommes partielles de séries dérivée premières convergentes de paramètre p et q de $]0,1[$.
Donc la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ converge.
X admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X=k)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} kP(X=k)\\ &= q\times\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right)+p\times\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1\right)\\ &= q\times\left(\frac{1}{q^2}-1\right)+p\times\left(\frac{1}{p^2}-1\right)\\ &= \frac{1}{q}-q+\frac{1}{p}-p\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.\end{aligned}$$

2)a)• $$\begin{aligned}P\big((X=2)\cap(Y=1)\big) &= P\big((B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)\big)\\ &= P(B_1\cap N_2)+P(N_1\cap B_2)\quad \text{par incompatibilité}\\ &= P(B_1)P(N_2)+P(N_1)P(B_2)\quad \text{par indépendance}\\ &= pq+qp\\ &= 2pq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall k\geq 3,\ P\big((X=k)\cap(Y=1)\big) &= P(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k)\\ &= q\times\cdots\times q\times p\\ &= pq^{k-1}.\end{aligned}$$

b)La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{k\geq 2}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k\cap Y=1)\\
&= P(X=2\cap Y=1)+\sum_{k=3}^{+\infty} P(X=k\cap Y=1)\\
&= 2pq+\sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1}\\
&= 2pq+pq^2\sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-3}\\
&= 2pq+pq^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n}\\
&= 2pq+pq^2\times\frac{1}{1-q}\\
&= 2pq+q^2\\
&= q(1+p).
\end{aligned}$$

c)On a déjà $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

De plus, $\forall k \geq 2,\ P(Y = k) = P(B_1 \cap ... \cap B_k \cap N_{k+1})$

$$\begin{aligned}
&= P(B_1)\cdots P(B_k)P(N_{k+1})\\
&= p\times\cdots\times p\times q\\
&= p^k q.
\end{aligned}$$

3)Y et Z jouant des rôles symétriques, on a :

$Z(\Omega) = \mathbf{N}^*$, $P(Z = 1) = p(1 + q)$ et $\forall k \geq 2,\ P(Z = k) = q^k p$.

Enfin, $E(Z) = \dfrac{1}{p}(1 - q + q^2)$.

4)Soit $\omega \in \Omega$.

Comme $(Y = 1)\cup(Z = 1)$ est un événement certain, on a : $Y(\omega) = 1$ ou $Z(\omega) = 1$.

$-$ si $Y(\omega) = 1$, alors $(YZ–Y–Z + 1)(\omega) = Y(\omega)Z(\omega) - Y(\omega) - Z(\omega) + 1 = 0$,

$-$ si $Z(\omega) = 1$, alors $(YZ–Y–Z + 1)(\omega) = Y(\omega)Z(\omega) - Y(\omega) - Z(\omega) + 1 = 0$.

Donc la variable aléatoire $YZ–Y–Z + 1$ est nulle, ce qui signifie que $YZ = X–1$.

5)Comme X admet une espérance, $X - 1$ donc YZ admet une espérance.

De plus Y et Z admettent une espérance.

Donc le couple (Y, Z) admet une covariance donnée par la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
cov(Y,Z) &= E(YZ)–E(Y)E(Z)\\
&= E(X-1)–E(Y)E(Z)\\
&= E(X)–1–E(Y)E(Z).
\end{aligned}$$