

Chapitre 10 : fonctions de deux variables

Dans tout le chapitre, on identifie $\mathbf{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ avec l'ensemble des points du plan.

I) Topologie de \mathbf{R}^2

Déf : soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de \mathbf{R}^2 .

On appelle distance de A à B , le nombre réel noté $d(A, B)$, défini par :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Déf : soit A un point de \mathbf{R}^2 et soit $r > 0$ un réel.

On appelle disque ouvert de centre A et de rayon r , la partie de \mathbf{R}^2 , notée $D_o(A, r)$, définie par :

$$D_o(A, r) = \{M \in \mathbf{R}^2 \mid d(A, M) < r\}.$$

On appelle disque fermé de centre A et de rayon r , la partie de \mathbf{R}^2 , notée $D_f(A, r)$, définie par :

$$D_f(A, r) = \{M \in \mathbf{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}.$$

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x + 6y < 15\}$. Reconnaître et représenter E .

Déf : soit U une partie de \mathbf{R}^2 .

On dit que U est ouverte si pour tout point A de U , il existe un disque de centre A strictement inclus dans U .

On dit que U est fermée si son complémentaire est ouverte.

Remarque

En pratique, une partie ouverte de \mathbf{R}^2 , c'est une partie du plan dont on enlève la frontière.

Exemples :

1) Tout disque ouvert est une partie ouverte de \mathbf{R}^2 .

Tout disque fermé est une partie fermée de \mathbf{R}^2 .

2) Tout rectangle $]a, b[\times]c, d[$ est une partie ouverte de \mathbf{R}^2 .

Tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est une partie fermée de \mathbf{R}^2 .

Déf : on dit qu'une partie U de \mathbf{R}^2 est bornée si elle est incluse dans un disque de centre O , c'est-à-dire s'il existe un réel $K > 0$ tel que $\forall M \in U, d(O, M) \leq K$.

Exemples :

1) Tout disque est une partie bornée de \mathbf{R}^2 .

2) Tout rectangle est une partie bornée de \mathbf{R}^2 .

II) Fonction de deux variables

Déf : on appelle fonction de deux variables toute application $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$, où U est une partie de \mathbf{R}^2 .

L'ensemble $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3, (x, y) \in U\}$ est une surface de l'espace.

Déf : soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ et soit $c \in \mathbf{R}$.

On appelle ligne de niveau c de f , la partie de \mathbf{R}^2 , notée L_c , définie par :

$$L_c = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\}.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = x^2 y^2$.

Déterminer la ligne de niveau 1 de f .

III) Continuité d'une fonction de deux variables

Dans tout le paragraphe, U est une partie de \mathbf{R}^2 .

Def : soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ et soit $M_0 \in U$.

On dit que f est continue en M_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in U, d(M, M_0) \leq \alpha \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| \leq \epsilon.$$

Déf : $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ est continue sur U si elle est continue en tout point de U .

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ est polynomiale si c'est une combinaison linéaire de fonctions du type $(x, y) \rightarrow x^i y^j$ où $i \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{N}$.

Propriété 1

Toute fonction polynomiale est continue sur \mathbf{R}^2 .

Propriété 2

La somme, la différence, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (bien défini) de fonctions continues sur U est continue sur U .

Propriété 3

La composée d'une fonction continue de deux variables, suivie d'une fonction continue d'une variable est une fonction continue de deux variables.

Exercice 3

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto (xy^2 + 5y)e^{x^2 - 3y^2 + 1}$ est continue sur \mathbf{R}^2 .

Exercice 4

Soit $D = D_0(O, 1)$.

Montrer que la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2)$ est continue sur D .

IV) Dérivées partielles d'ordre un

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à x si pour tout $y \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $x \rightarrow f(x, y)$ est dérivable sur \mathbf{R} , sa dérivée étant notée $\partial_1 f(x, y)$.

Remarque

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à y si pour tout $x \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est dérivable sur \mathbf{R} , sa dérivée étant notée $\partial_2 f(x, y)$.

Remarque

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Déf : les fonctions $\partial_1 f : (x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f : (x, y) \mapsto \partial_2 f(x, y)$ sont appelées dérivées partielles d'ordre un de f .

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 si f admet des dérivées partielles d'ordre un et si chacune de ces dérivées partielles est continue sur \mathbf{R}^2 .

Propriété 4

Toute fonction polynomiale est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 .

Propriété 5

La somme, la différence, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (bien défini) de fonctions de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 .

Propriété 6

La composée d'une fonction de classe C^1 de deux variables, suivie d'une fonction de classe C^1 d'une variable est une fonction de classe C^1 de deux variables.

Exercice 5

Soit $f : (x, y) \mapsto 2x^3 - 5x^3y^8 + 3xy - 5x + 2y + 7$.

Justifier que f est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

Exercice 6

Même question avec $f : (x, y) \mapsto (5x^3 + 3y^2)^4$.

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un.

On appelle gradient de f en (x, y) la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, notée $\nabla f(x, y)$, définie par $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$. Calculer $\nabla f(0, 0)$.

V) Dérivées partielles d'ordre deux

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un.

On dit que f admet des dérivées partielles d'ordre deux si les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ admettent des dérivées partielles d'ordre 1, notées :

$$\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f)$$

$$\partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f)$$

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_1(\partial_2 f)$$

$$\partial_{2,2}^2 f = \partial_2(\partial_2 f)$$

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^2 sur \mathbf{R}^2 si f admet des dérivées partielles d'ordre deux et si chacune de ces dérivées partielles est continue sur \mathbf{R}^2 .

Propriété 7

Les propriétés 4,5,6 restent vraies en remplaçant C^1 par C^2 .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = 4x^3y^2 + 2x^2y^3 + 5x - 3y$. Justifier que f est C^2 sur \mathbf{R}^2 , puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Théorème 1 (Schwarz)

Si f est de classe C^2 sur \mathbf{R}^2 , alors on a $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y)$.

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre deux.

On appelle matrice hessienne de f en (x, y) la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, notée $\nabla^2 f(x, y)$, définie par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(x, y) & \partial_{1,2}^2 f(x, y) \\ \partial_{2,1}^2 f(x, y) & \partial_{2,2}^2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

✓ Si f est C^2 sur \mathbf{R}^2 , alors $\nabla^2 f(x, y)$ est symétrique (Schwarz).

VI) Extrémum

Déf : soit U une partie de \mathbf{R}^2 et (x_0, y_0) un point de U .

On dit que $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ admet un maximum local (ou relatif) en (x_0, y_0) s'il existe un disque D inclus dans U centré en (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

On dit que ce maximum est global (ou absolu) si

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Déf : soit U une partie de \mathbf{R}^2 et (x_0, y_0) un point de U .

On dit que $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ admet un minimum local (ou relatif) en (x_0, y_0) s'il existe un disque D inclus dans U centré en (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

On dit que ce minimum est global (ou absolu) si

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Propriété 8

Soit U une partie de \mathbf{R}^2 et soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Si U est fermée et bornée, alors f admet un minimum global et un maximum global sur U .

Exercice 9

Justifier que la fonction f définie sur $U = [0, 1] \times [0, 1]$ par $f(x, y) = x^3 y^2 + x + y$ admet un maximum global et un minimum global sur U .

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un en (x_0, y_0) .

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire si $\partial_1 f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$.

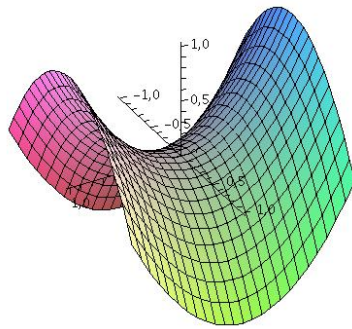
Théorème 2 (condition nécessaire d'extrémum)

Soit U une partie ouverte de \mathbf{R}^2 et soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^1 sur U .

Si f admet un extrémum (local ou global) en un point (x_0, y_0) de U , alors (x_0, y_0) est un point critique de f .

Remarque

La réciproque est fausse, il peut exister des points critiques (x_0, y_0) de f qui ne sont pas des extrémums de f . On les appelle « points selle ».



Théorème 3 (condition suffisante d'extrémum local)

Soit U une partie ouverte de \mathbf{R}^2 et soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^2 sur U .

Soit $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f .

- Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0) .
- Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0) .
- Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont non-nulles et de signes contraires, alors f n'admet pas d'extrémum local en (x_0, y_0) . C'est un « point selle ».
- Si l'une des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut pas conclure. C'est un « point dégénéré ».

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y^4.$$

- 1) Montrer que f admet un unique extrémum local et préciser sa nature.
- 2) a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = (x + y)^2 + y^2 + 2y^4$.
- b) Le point $(0, 0)$ est-il un extrémum global de f ?

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = x^3 + 2x^2 + x - y^2.$$

Etudier si f admet des extrémums locaux.