Corrigé révisions - séance 3

<u>Exercice</u>

1)$X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, les moments d'ordre 1 et 2 sont donnés par le cours :

$\mathscr{M}_1(X) = E(X) = 0$ et $\mathscr{M}_2(X) = E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0^2 = 1.$

2)a)• $$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n\varphi(t)}{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{n+2} e^{-t^2/2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{en posant } x = t^2 \\ &= 0 \quad \text{par croissances comparées.}\end{aligned}$$

Donc $t^n\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann de paramètre $2 > 1$).

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre, puisque la fonction $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est continue sur $[0,1]$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

Enfin, $\forall t \geq 0,\ \left|t^n\varphi(t)\right| = t^n\varphi(t)$ car $t^n\varphi(t) \geq 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|t^n\varphi(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

b)$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbf{R},\ \left|(-t)^n\varphi(-t)\right| &= \left|(-1)^n t^n\varphi(t)\right| \quad \text{car } \varphi \text{ est paire.} \\ &= \left|(-1)^n\right| \left|t^n\varphi(t)\right| \\ &= \left|t^n\varphi(t)\right|\end{aligned}$$

Donc la fonction $t \mapsto \left|t^n\varphi(t)\right|$ est paire.

c)Comme $t \mapsto \left|t^n\varphi(t)\right|$ est paire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|t^n\varphi(t)\right| \mathrm{d}t$ converge, on peut conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^n\varphi(t)\right| \mathrm{d}t$ converge. Donc X admet un moment d'ordre n.

d)Par définition, $\mathscr{M}_n(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$.

Si n est impair, la fonction $t \mapsto t^n\varphi(t)$ est impaire comme produit d'une fonction impaire par une fonction paire.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge (puisque l'intégrale converge absolument).

Donc $\mathscr{M}_n(X) = 0$.

3)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) \times e^{-t^2/2} = -t\varphi(t)$.

3)b)Soit $A > 0$.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^A t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t$ en posant :

$u'(t) = t\varphi(t) \qquad v(t) = t^{n+1}$
$u(t) = -\varphi(t) \qquad v'(t) = (n+1)t^n$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t &= \left[-t^{n+1}\varphi(t)\right]_0^A - \int_0^A -(n+1)t^n\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= -A^{n+1}\varphi(A) + (n+1)\int_0^A t^n\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (*)\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{n+1}\varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}A^{n+1}e^{-A^2/2} = 0$ (même calcul qu'en 2)a)).

En passant à la limite dans $(*)$ quand $A \to +\infty$, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

3)c)En faisant une IPP sur $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t$ avec $B < 0$, on obtient en faisant $B \to -\infty$:

$$\int_{-\infty}^0 t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_{-\infty}^0 t^n\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

3)d)En ajoutant membre à membre les égalités 3)b) et 3)c), on a :

$$\int_{-\infty}^0 t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_{-\infty}^0 t^n\varphi(t)\mathrm{d}t + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$$

La relation de Chasles donne alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}\varphi(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\varphi(t)\mathrm{d}t$.

C'est-à-dire :

$$\mathscr{M}_{n+2}(X) = (n+1)\mathscr{M}_n(X).$$

3)e)• Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $\mathscr{M}_{2k}(X) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\mathscr{M}_1(X) = 1$ », ce qui est vrai.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{2k+2}(X) &= (2k+1)\mathscr{M}_{2k}(X) \quad \text{en utilisant 3)d) avec } n \to 2k \\ &= (2k+1)\frac{(2k)!}{2^k k!} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{2^k k!(2k+2)} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^k k! \times 2(k+1)} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathscr{M}_{2k}(X) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$.

• On retrouve la valeur de $E(X^2) = \mathscr{M}_2(X) = 1$.

Enfin, $E(X^4) = \mathscr{M}_4(X) = \dfrac{4!}{2^2 2!} = \dfrac{24}{8} = 3$.