TD11 - équations et systèmes différentiels

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle I donné.

1)$y' = t^3 \qquad I = \mathbf{R}$

2)$ty' = 1 \qquad I =]0, +\infty[$

3)$y'' = 2 \qquad I = \mathbf{R}$

4)$t^2 y'' = 1 \qquad I =]-\infty, 0[$.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$y' + 2y = 0 \qquad$ 2)$y' = 3y \qquad$ 3)$2y' + 5y = 0$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad$ 2)$y'' = -y' + 2y \quad$ 3)$y'' - 2y' + y = 0$.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-t}.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

2)Montrer que la fonction $t \mapsto te^{-t}$ est solution de (E).

3)En déduire les solutions de (E).

Exercice 5 ★ ☆ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - y = -t^2.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

2)Chercher une fonction polynomiale du second degré solution de (E).

3)En déduire les solutions de (E).

4)Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 4te^t.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$.

2)Chercher une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto (at + b)e^t$.

3)En déduire les solutions de (E).

4)Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 2$ et $h'(0) = 0$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1)a)Déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de A.

b)Justifier que A est diagonalisable.

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -2x & + & 4y \\ y' & = & x & - & 2y \end{array} \right.$$

a)Ecrire (S) sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre (S).

3)a)Déterminer les points d'équilibre de (S).

b)En utilisant la question 2)b), vérifier que toutes les trajectoires de (S) convergent vers un point d'équilibre. Pouvait-on le prévoir ?

4)Soit $H : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ H(x,y) = x + 2y$.

Vérifier que si (x,y) est un couple solution de (S), alors la fonction $t \mapsto H\left(x(t), y(t)\right)$ est constante.

Que peut-on dire alors des trajectoires de (S) ?

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

On considère le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & 2y \end{array} \right.$$

1)Quels sont les points d'équilibre de (S) ?

2)Résoudre (S).

3)Donner l'allure des trajectoires de (S).

Exercice 9 ★ ★ ★☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

2)Résoudre « à la main » le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & y & & \end{array} \right.$$

Indication : on résoudra la deuxième équation différentielle, puis on reportera les solutions y trouvées dans la première équation différentielle.
Il restera alors à résoudre la première équation différentielle.

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Que conclure pour A ?

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

a)Ecrire (S) sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre (S).

Exercice 11 ★ ★ ☆☆

Dans tout l'exercice, on donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a)Justifier que A est diagonalisable.

b)Vérifier que $A^3 = 6A^2$.

c)En déduire les valeurs propres de A et une base des sous-espaces propres associés.

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$$

a)Ecrire (S) sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre (S).

Indications / Réponses

Exercice 1

1)$y : t \mapsto \frac{t^4}{4} + C$ où $C \in \mathbf{R}$ 2)$y : t \mapsto \ln t + C$ où $C \in \mathbf{R}$

3)$y : t \mapsto t^2 + at + b$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ 4)$t \mapsto -\ln|t| + at + b$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 2

On utilise le THM1.

1)$y : t \mapsto \beta e^{-2t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$ 2)$y : t \mapsto \beta e^{3t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$ 3)$y : t \mapsto \beta e^{-\frac{5}{2}t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

Exercice 3

On utilise le THM3.

1)$y : t \mapsto \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{3t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$

2)$y : t \mapsto \beta_1 e^{t} + \beta_2 e^{-2t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$

3)$y : t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 4

1)$y : t \mapsto \beta e^{-t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

2)On note $g : t \mapsto te^{-t}$ et on vérifie que $\forall t \in \mathbf{R},\ g'(t) + g(t) = e^{-t}$.

3)D'après le THM2, les solutions de (E) sont $t \mapsto \beta e^{-t} + te^{-t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

Exercice 5

1)$y : t \mapsto \beta e^{t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

2)$t \mapsto t^2 + 2t + 2$.

3)Les solutions de (E) sont $t \mapsto \beta e^{t} + t^2 + 2t + 2$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

4)$h : t \mapsto -e^{t} + t^2 + 2t + 2$.

Exercice 6

1)$y : t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{-t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

2)$y_p : t \mapsto (t-1)e^{t}$.

3)Les solutions de (E) sont $t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{-t} + (t-1)e^{t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

4)$h : t \mapsto (3t+3)e^{-t} + (t-1)e^{t}$.

Exercice 7

1)a)$sp(A) = \{0, -4\}$.

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases de $E_0(A)$ et $E_{-4}(A)$.

2)a)(S) s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

2)b)En utilisant le THM5, on trouve que les solutions de (S) sont les fonctions : $t \mapsto \left(2\beta_1 - 2\beta_2 e^{-4t}, \beta_1 + \beta_2 e^{-4t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

3)a)En utilisant P5 ou la définition, on trouve que les points d'équilibre de (S) sont les couples de la forme $(2a, a)$ où $a \in \mathbf{R}$. Il y en a une infinité !

3)b)$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-4t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 2\beta_1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \beta_1$.

Les trajectoires convergent vers le point d'équilibre $(2\beta_1, \beta_1)$.

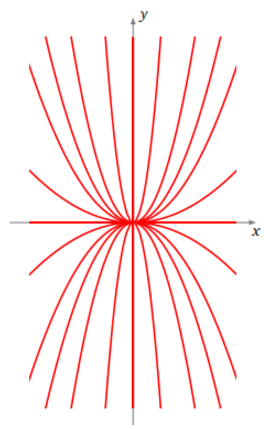
Résultat prévisible (utiliser P7).

Exercice 8

1)$(0,0)$ est le seul point d'équilibre de (S).

2)Le système étant diagonal, on peut résoudre chacune des équations différentielles. Les solutions de (S) sont alors les fonctions $t \mapsto \left(\beta e^{t}, \gamma e^{2t}\right)$.

3)Les trajectoires sont les deux demi-axes horizontaux, les deux demi-axes verticaux et des courbes qui sont des branches de parabole.



Exercice 9

1)Classique : si A était diagonalisable, elle serait semblable à I donc égale à I.

2)Le cours ne s'applique pas du fait que A n'est pas diagonalisable !

Les solutions sont $t \mapsto \left((a+bt)e^{t}, be^{t}\right)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 10

1)$AV_1 = 0$, $AV_2 = V_2$ et $AV_3 = 2V_3$. On conclut que A est diagonalisable.

2)a)(S) s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

2)b)Les solutions de (S) sont : $t \mapsto \left(\beta_1 + \beta_3 e^{2t}, \beta_1 + \beta_2 e^{t} + \beta_3 e^{2t}, -\beta_1 - \beta_2 e^{t} + \beta_3 e^{2t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$.

Exercice 11

1)a)A est symétrique donc diagonalisable.

c)$X^3 - 6X^2$ est un polynôme annulateur de A. Ses racines sont 0 et 6.

Donc $sp(A) \subset \{0,6\}$. On vérifie ensuite que 0 et 6 sont des VP de A.

base de $E_0(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et base de $E_6(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2)a)(S) s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

2)b)Les solutions de (S) sont : $t \mapsto \left(\beta_1 + \beta_3 e^{6t}, \beta_2 + 2\beta_3 e^{6t}, \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 e^{6t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$.