Exercice 1 (ecricome 2025)

1)$E_{0_3} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid 0_3 M + M 0_3 = 0_3\}$.

Or, l'égalité qui définit E_{0_3} est vraie pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Donc $E_{0_3} = \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$E_{I_3} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid I_3 M + M I_3 = 0_3\} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid 2M = 0_3\}$.

Seule la matrice nulle vérifie l'égalité ci-dessus. Donc $E_{I_3} = \{0_3\}$.

2)Soit $C \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$0_3 \in E_C$ car $C0_3 + 0_3 C = 0_3$. Ainsi, E_C est une partie non vide de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Soient M et N deux matrices quelconques de E_C. Soit λ un réel quelconque.

$C(\lambda M + N) + (\lambda M + N)C$

$= \lambda CM + CN + \lambda MC + NC$

$= \lambda(CM + MC) + (CN + NC)$

$= \lambda 0_3 + 0_3 \quad$ car par hypothèse $M \in E_C$ et $N \in E_C$

$= 0_3$.

Donc $\lambda M + N \in E_C$, ce qui montre la stabilité de E_C par combinaison linéaire.

Ainsi, E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

3)Soit $M \in E_A$ où A est la matrice de l'énoncé.
Remarquons que A est symétrique, ce qui se traduit par : ${}^tA = A$.

$A{}^tM + {}^tMA$

$= {}^tA{}^tM + {}^tM{}^tA \quad$ car ${}^tA = A$

$= {}^t(MA) + {}^t(AM)$

$= {}^t(MA + AM) \quad$ car la transposée est linéaire

$= {}^t(AM + MA)$

$= {}^t0_3 \quad$ car $M \in E_A$

$= 0_3$.

4)a)A est symétrique donc diagonalisable.

b)Soit λ un réel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $A^3 = 9A$. Le polynôme $P(X) = X^3 - 9X$ est donc un polynôme annulateur de A.

Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi les racines de P.

Ainsi, si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

c)Comme A est diagonalisable, on sait d'après le cours que A peut s'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$ ou ce qui est équivalent : $D = P^{-1}AP$.

Pour construire P, on s'arrange pour que les colonnes de P soient des vecteurs propres de A et forment une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
La diagonale de D contient les valeurs propres de A.
En pratique, on est amené à chercher les sous-espaces propres de A, mais sans être nécessairement obligé d'aller jusqu'à la recherche d'une base de ces sous-espaces propres.

$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.
Donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0, 3 et -3.

- $E_{-3}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A + 3I_3)U = 0_3\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(A+3I_3)U = 0_3 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y & = 0 \\ -2x + 3y + 2z & = 0 \\ 2y + 2z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 2x, z = -2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Donc -3 est bien valeur propre de A.

- $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0_3\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
AU = 0_3 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ -2x + 2z & = 0 \\ 2y - z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2y, z = 2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix},\ y \in \mathbf{R} \right\}$

$= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Donc 0 est bien valeur propre de A.

• $E_3(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 3I_3)U = 0_3\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(A - 3I_3)U = 0_3 &\iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} -2x - 2y & = 0 \\ -2x - 3y + 2z & = 0 \\ 2y - 4z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = 2z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -2z, y = 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Donc 3 est bien valeur propre de A.

• La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car formée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ puisque son cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

On prend donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5)$P^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

On constate que $P^2 = 9I_3$. Donc $P \left(\dfrac{1}{9} P \right) = I_3$.

Cela prouve que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{9} P = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6)a)Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
N \in E_D &\iff DN + ND = 0_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff a = b = d = f = h = i = 0 \\
&\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b)On déduit :

$$\begin{aligned}
E_D &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3} \right)\right).
\end{aligned}$$

$\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une famille génératrice de E_D.

De plus, pour tous réels λ_1, λ_2 et λ_3, on a :

$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0_3$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff c = e = g = 0.$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.

On conclut que $\mathscr{B}$ est une base de E_D et $dim E_D = 3$.

7)a)Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $N = P^{-1}MP$.

$$\begin{aligned}
M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \\
&\iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0_3 \\
&\iff P^{-1}\left(PDP^{-1}M + MPDP^{-1}\right)P = P^{-1}0_3P \\
&\iff P^{-1}PDP^{-1}MP + P^{-1}MPDP^{-1}P = 0_3 \\
&\iff DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0_3 \\
&\iff DN + ND = 0_3 \\
&\iff N \in E_D.
\end{aligned}$$

b)$M \in E_A$

$\iff N \in E_D$

$\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid N = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3$

$\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid P^{-1}MP = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3$

$\iff \exists(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid M = P\left(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3\right)P^{-1}$

$\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid M = \lambda_1 PU_1P^{-1} + \lambda_2 PU_2P^{-1} + \lambda_3 PU_3P^{-1}$

Les équivalences ci-dessus montrent que toute matrice M de E_A s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des matrices PU_1P^{-1}, PU_2P^{-1} et PU_3P^{-1}.

Donc la famille $\left(PU_1P^{-1}, PU_2P^{-1}, PU_3P^{-1}\right)$ est une base de E_A.

8)Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+M)^2 = A^2 + M^2 &\iff (A+M)(A+M) = A^2 + M^2 \\
&\iff A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \\
&\iff AM + MA = 0_3 \\
&\iff M \in E_A
\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc E_A.

9)On constate que $Ker\varphi = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid \varphi(M) = 0_3\} = E_A$.

La question 7)b) fournit une base de E_A de cardinal 3. Donc $dimE_A = 3$.

D'après le théorème du rang, on a : $\underbrace{dimKer\varphi}_{=3} + dimIm\varphi = \underbrace{dim\mathscr{M}_3(\mathbf{R})}_{=9}$.

D'où $dimIm\varphi = 6$, ce qui signifie que le rang de φ vaut 6.

Exercice 2 (ecricome 2025)

1)a)Soit $n \in \mathbf{N}$.

$t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

En effet, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre 2).

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}dt$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ étant continue sur $[0,1]$.

On conclut grâce à la relation de Chasles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge.

b)• $\displaystyle I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x$

$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1.$

• Pour le calcul de I_1, faisons une IPP sur $\displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$ où $x>0$.

On pose :

$u(t) = t \qquad v'(t) = e^{-t}$

$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}dt &= \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt\\ &= -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x\\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-t}dt = 1$ et on conclut que $I_1 = 1$.

2)Soit $x \geq 0$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 1+xt \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+xt} \leq 1$, puis en multipliant par $e^{-t} > 0$:

$$0 < \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}.$$

D'après la première question, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$ converge.

3)$F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = I_0 = 1$.

4)Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$.

On a alors pour tout $t \geq 0$:

$xt \leq yt$, puis $1+xt \leq 1+yt$ et $\dfrac{1}{1+yt} \leq \dfrac{1}{1+xt}$.

En multipliant par $e^{-t} > 0$: $\dfrac{e^{-t}}{1+yt} \leq \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}.$$

On a donc $F(y) \leq F(x)$, ce qui prouve que F est décroissante sur $[0, +\infty[$.

5)a)• Premier cas : $x = 0$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dt = \int_0^1 1dt = 1$.

• Deuxième cas : $x > 0$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}dt = \frac{1}{x}\left[\ln(1+xt)\right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

b)Soit $x \geq 0$.

Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a : $0 \leq e^{-t} \leq 1$. Puis en divisant par $1+xt > 0$:

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}.$$

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on déduit :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}.$$

c)Soit $x > 0$.

Pour tout réel $t \geq 1$, on a : $xt \geq x$, puis $1+xt \geq 1+x \geq x$.

En passant à l'inverse : $0 < \dfrac{1}{1+xt} \leq \dfrac{1}{x}$.

En multipliant par $e^{-t} > 0$: $0 < \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leq \dfrac{e^{-t}}{x}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on déduit :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}.$$

Donc $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}$.

d)En ajoutant membre à membre les inégalités des questions 5)b) et 5)c) et en appliquant la relation de Chasles dans le membre central, on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}.$$

Compte tenu de la question 5)a), on déduit alors pour tout $x > 0$:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}.$$

Etudions maintenant la limite du membre de droite quand $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}$ est une constante. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t-1} \quad \text{en posant } t = 1+x \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} \quad \text{car } t-1 \underset{+\infty}{\sim} t \\ &= 0 \quad \text{par croissances comparées.} \end{aligned}$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t} = 0$.

La propriété des gendarmes donne alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6)a)Soit $y > 0$.

$$\begin{aligned} &\int_0^y \frac{e^{-t}}{1+xt} - \int_0^y e^{-t}(1-xt)dt \\ &= \int_0^y \Big(\frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\Big)dt \\ &= \int_0^y \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt}dt \\ &= \int_0^y \frac{e^{-t} - e^{-t}\big(1-x^2t^2\big)}{1+xt}dt \\ &= \int_0^y \frac{x^2t^2e^{-t}}{1+xt}dt \\ &= x^2\int_0^y \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt. \end{aligned}$$

Donc $\int_0^y e^{-t}(1-xt)dt = \int_0^y \frac{e^{-t}}{1+xt}dt - x^2\int_0^y \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \qquad (*)$

D'après l'énoncé, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt$ converge.

Quant à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$, elle converge et vaut $F(x)$.

On peut donc passer à la limite dans $(*)$ en faisant $y \to +\infty$, ce qui donne :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = F(x) - x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt.$

D'où, $\displaystyle F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt.$

b)$$\begin{aligned}F(x) - I_0 + xI_1 &= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt \\ &= F(x) - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}dt - x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt\right) \\ &= F(x) - \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - xte^{-t}\right)dt \\ &= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(1-xt\right)dt \\ &= x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \quad \text{d'après 6)a)} \quad (*)\end{aligned}$$

De plus, on a $\forall t \geq 0,\ 0 \leq \dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leq t^2e^{-t}$ comme déjà fait précédemment.

En intégrant selon les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leq \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$$

D'où $\displaystyle 0 \leq x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leq x^2I_2.$

De $(*)$, on tire alors : $0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2I_2$.

7)a)Comme $I_0 = I_1 = 1$, on a : $\forall x > 0,\ 0 \leq F(x) - 1 + x \leq x^2I_2$.

En divisant par $x > 0$:

$$0 \leq \frac{F(x) - 1 + x}{x} \leq xI_2.$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xI_2 = 0.$

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-1+x}{x} = 0.$

Cela signifie que $F(x) - 1 + x \underset{0}{=} o(x)$, c'est-à-dire que $F(x) \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$.

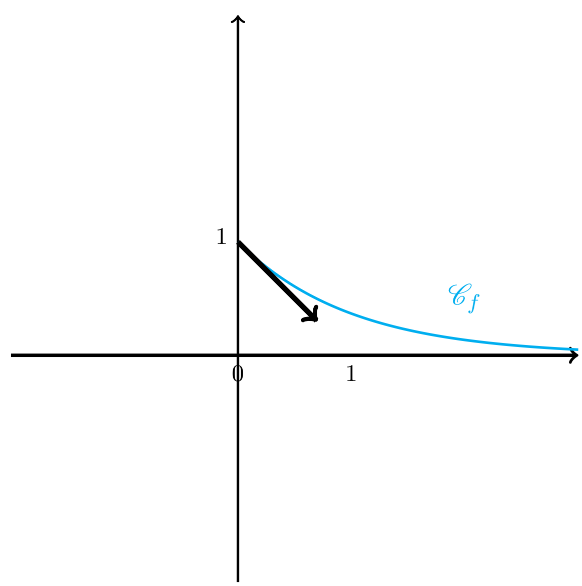
b)Comme F possède un développement limité d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $F'(0) = -1$.

Remarque :
On peut retrouver ce résultat en faisant le calcul suivant :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x+o(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(-1+\frac{o(x)}{x}\right)\\ &= -1.\end{aligned}$$

8)On trace $\mathscr{C}_F$ en utilisant ce qu'on a démontré :

- $F(0)=1$ et $F'(0)=-1$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$,

F est décroissante et continue sur $[0,+\infty[$.



Exercice 3 (ecricome 2025)

Partie I

1)Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

• f_i est positive sur $[1, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 1[$. Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f_i(x) \geq 0$.

• f_i est continue sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. f_i est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle). Donc f_i est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 1.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx$ converge et vaut 0.

De plus, pour tout réel $A > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A f_i(x)dx &= \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}dx \\
&= \int_1^A ix^{-i-1}dx \\
&= \left[-x^{-i}\right]_1^A \\
&= -A^{-i} + 1 \\
&= 1 - \frac{1}{A^i}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f_i(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A^i}\right) = 1.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_i(x)dx$ converge et vaut 1.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx + \int_1^{+\infty} f_i(x)dx = 0 + 1 = 1.$

On conclut que f_i est une densité de probabilité.

2)a)• X_i admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_i(x)|dx$ converge.

Comme $x \mapsto xf_i(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$, cela se ramène à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf_i(x)dx$, c'est-à-dire à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}dx$.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}dx$ a même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}dx$.

Elle converge si et seulement si $i > 1$.

Ainsi, X_i admet une espérance si et seulement si $i \in [\![2, n]\!]$.

• Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{1} x f_i(x) dx + \int_{1}^{+\infty} x f_i(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{1} x \times 0 \, dx + \int_{1}^{+\infty} x \times \frac{i}{x^{i+1}} dx \\
&= \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx \\
&= \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} i x^{-i} dx \\
&= \lim_{A \to +\infty} \left[i \times \frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A \\
&= \lim_{A \to +\infty} \frac{i}{-i+1} \left(A^{-i+1} - 1 \right) \\
&= \lim_{A \to +\infty} \frac{i}{i-1} \left(1 - \frac{1}{A^{i-1}} \right) \\
&= \frac{i}{i-1}.
\end{aligned}$$

b)Le revenu mensuel moyen est l'espérance de X_i, c'est-à-dire $\frac{i}{i-1}$.

Etudions les variations de la suite $(U_i)_{i \geq 2}$ définie par $U_i = \frac{i}{i-1}$.

$U_{i+1} - U_i = \frac{i+1}{i} - \frac{i}{i-1} = \frac{(i+1)(i-1) - i^2}{i(i-1)} = -\frac{1}{i(i-1)} < 0.$

La suite $(U_i)_{i \geq 2}$ est strictement décroissante.

On a donc : $E(X_n) < E(X_{n-1}) < ... < E(X_3) < E(X_2)$.

3)Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction de répartition F_i de X_i est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \; F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t) dt.$$

Distinguons deux cas :

• $x < 1$

f_i est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc sur $]-\infty, x]$.

Donc $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t) dt = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$.

• $x \geq 1$

$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t) dt = \int_{-\infty}^{1} f_i(t) dt + \int_{1}^{x} f_i(t) dt = 0 + \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}} dt.$

Et $\displaystyle\int_1^x \frac{i}{t^{i+1}}dt = 1 - \frac{1}{x^i}$ en reprenant le calcul fait en 1) avec $A \to x$.

On conclut que $\forall x \in \mathbf{R},\ F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

4)a)Remarquons déjà que U prend ses valeurs dans $]0,1[$. Il en est de même de $U^{1/i}$. Puis, par inverse, V_i prend ses valeurs dans $]1,+\infty[$.

Calculons maintenant la fonction de répartition G_i de V_i.

Pour tout x réel, on a : $G_i(x) = P(V_i \leq x)$.

Distinguons deux cas :

• $x \leq 1$
On a alors : $(V_i \leq x) \subset (V_i \leq 1) = \emptyset$ du fait que $V_i(\Omega) =]1,+\infty[$.
Donc $P(V_i \leq x) = 0$, c'est-à-dire $G_i(x) = 0$.

• $x > 1$

$$\begin{aligned} G_i(x) &= P(V_i \leq x) \\ &= P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right) \\ &= P\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\\ &= P\left(U \geq \left(\frac{1}{x}\right)^i\right) \\ &= 1 - P\left(U < \frac{1}{x^i}\right) \\ &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right). \end{aligned}$$

Comme $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$, sa fonction de répartition F_U est donnée par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ici, on est dans le cas où $x > 1$. On a alors : $\dfrac{1}{x^i} \in]0,1[$, d'où $F_U\left(\dfrac{1}{x^i}\right) = \dfrac{1}{x^i}$.

Ainsi, $G_i(x) = 1 - \dfrac{1}{x^i}$.

On conclut que $G_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x > 1 \\ \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

On vérifie facilement que G_i est continue en 1, ce qui permet de réécrire les inégalités en :

$$G_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} = F_i(x).$$

V_i et X_i ont la même fonction de répartition donc la même loi.

b)Comme V_i et X_i ont la même loi, on peut simuler V_i.

```
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    U=rd.random()
    Vi=1/U**(1/i)
    return Vi
```

Partie II

5)$Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1, p)$.
On peut voir $Y-1$ comme la somme de $n-1$ variables aléatoires indépendantes Z_1, ..., Z_n qui suivent chacune la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(Z_i = 1) = p$ est également la probabilité pour qu'un réel pris au hasard entre 0 et 1 soit inférieur à p.
Si le test `if rd.random()<p:` est réalisé, cela signifie donc que $Z_i = 1$.
Il ne reste plus qu'à compter le nombre de 1, grâce à la variable s.

```
def simulY(n,p):
    s=0
    for k in range(n-1):
        if rd.random()<p:
            s=s+1
    return(s+1)
```

6)Lors de la réalisation d'un grand nombre d'épreuves indépendantes (10000 ici), la fréquence d'apparition de l'événement $(Y = i)$ est proche de la probabilité $P(Y = i)$, en vertu de la loi faible des grands nombres.
Pour tout $y \in [\![1, n]\!]$, le nombre de fois où Y prend la valeur y est stocké dans la case loi[y-1] de la liste loi.
A la fin de la boucle, la probabilité $P(Y = y)$ est donc très proche de loi[y-1]$/N$ qui représente la fréquence d'apparition de l'événement $(Y = y)$.

> Remarques
> 1)Du fait qu'on numérote les listes toujours à partir de zéro, il faut bien mettre loi[y-1] et non loi[y].
> 2)Il y a une erreur d'énoncé sur la dernière ligne du programme. Il ne faut pas mettre `return loi`, mais plutôt `return loi/N`. Malheureusement, on ne pas diviser une liste par un nombre, d'où ma proposition.

```
def loiY(n, p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range(N):
        y = simulY(n, p)
        loi[y-1]=loi[y-1]+1
    return [y/N for y in loi]
```

7)On représente en abscisses i entier entre 1 et n et en ordonnées la probabilité correspondante $P(Y=i)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def diagramme(n,p):
    i=np.linspace(1,n,n)
    y=loiY(n,p)
    plt.bar(i,y)
    plt.show()
```

8)a)La clé primaire d'une table est un attribut qui permet d'identifier de manière unique tout enregistrement.

> Rappel :
> Un enregistrement est une ligne de la table.

b)Clé primaire :
− pour la table `individu` : le numéro INSEE,
− pour la table `departement` : le numéro du département,
− pour la table `profession` : le code PCS.

c)La table `individu` et la table `departement` sont reliées car elles ont un attribut en commun : le numéro du département.

La table `individu` et la table `profession` sont reliées car elles ont un attribut en commun : le code PCS.

d)
```
SELECT DISTINCT i_code_profession FROM individu
WHERE i_departement=28;
```

e)
```
SELECT i_insee,p_categorie
FROM individu INNER JOIN profession
ON i_code_profession=p_pcs
```

Partie III

9)On sait que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i(\Omega)=[1,+\infty[$ donc $Z_n(\Omega)=[1,+\infty[$.

Pour $x<1$, on a : $G_n(x)=P(Z_n \leq x)=0$ car $(Z_n \leq x) \subset (Z_n<1)=\emptyset$.

10)Soit $x \geq 1$.

a)Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Si l'événement $(Y = i)$ est réalisé, cela signifie que l'individu choisi au hasard est dans la catégorie i. Son salaire mensuel est X_i.
L'événement $(Z_n \leq x)$ se réalise donc si et seulement si $(X_i \leq x)$ se réalise.
Donc $P_{(Y=i)}(Z_n \leq x) = P(X_i \leq x) = F_i(x)$.
b)On a : $G_n(x) = P(Z_n \leq x)$.
La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(Y = i)_{1\leq i\leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} P_{(Y=i)}(Z_n \leq x)P(Y = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)P(Y = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)P(Y = k + 1) \quad \text{en posant } i = k + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)P(Y - 1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} \quad \text{car } Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n - 1, p).
\end{aligned}$$

c)En utilisant la question I.3 avec $i \to k + 1$, on a :
$\forall x \geq 1,\ F_{k+1}(x) = 1 - \dfrac{1}{x^{k+1}}$.
En remplaçant dans l'égalité 10)b), on a :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k}.$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k}}_{S} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^{k+1}} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k}}_{T}.$$

Calculons maintenant les sommes S et T.

D'après la formule du binôme, $S = \big(p + (1 - p)\big)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-1-k}}{x^n} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= \frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k\big((1-p)x\big)^{n-1-k} \\
&= \frac{1}{x^n}\big(p + (1-p)x\big)^{n-1} \quad \text{grâce à la formule du binôme}
\end{aligned}$$

On conclut que $G_n(x) = 1 - \dfrac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n}$.

11)D'après les questions précédentes, on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

• G_n est continue sur $]-\infty, 1[$ comme fonction nulle et continue sur $[1, +\infty[$ comme produit, inverse et quotient de fonctions continues.

En prenant la formule du bas, on a immédiatement : $G_n(1) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} G_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 0 = 0 = G_n(1)$.

Donc G_n est continue à gauche en 1. Elle était déjà continue à droite en 1 puisque continue sur $[1, +\infty[$, elle est donc continue en 1.

Ainsi, G_n est continue sur $\mathbf{R}$.

• G_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ comme fonction nulle et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ comme produit, inverse et quotient de fonctions C^1.
G_n est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 1.

On conclut que Z_n est une variable aléatoire à densité.

12)programme :

```
def sondage(n,p):
    i=simulY(n,p)
    return simulX(i)
```

13)a)• Pour $x < 1$, on a bien : $G_n(x) = 0$.

• Prenons $x \geq 1$.
En écrivant $x^n = x \times x^{n-1}$, on obtient grâce à la question 10)c) :

$G_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \times \left(\dfrac{p + (1-p)x}{x}\right)^{n-1}$

Puis, avec $p = 1/n$, on a :

$\dfrac{p + (1-p)x}{x} = \dfrac{\frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})x}{x} = \dfrac{1 + n(1 - \frac{1}{n})x}{nx} = \dfrac{1 + nx - x}{nx} = 1 - \dfrac{x-1}{nx}$.

Ainsi, $G_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$.

$$\text{On conclut que } G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

b)Pour x réel fixé, il faut chercher $\lim_{n\to+\infty} G_n(x)$. Distinguons deux cas :

• $x < 1$

On a : $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

• $x \geq 1$

On a : $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$ est une forme indéterminée du type 1^{∞}.

Pour la lever, on réécrit à l'aide d'une exponentielle :

$$\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)\right) \qquad (*)$$

D'après le cours, $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{x-1}{nx}\right) = 0$, on peut appliquer l'équivalent précédent avec $t \to -\dfrac{x-1}{nx}$, ce qui donne : $\ln\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x-1}{nx}$.

D'où, $(n-1)\ln\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1)\dfrac{x-1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x-1}{x}$.

Cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} (n-1)\ln\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right) = -\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$.

$(*)$ donne : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{\frac{1}{x}-1}$, puis $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}-1}$.

Posons $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Les calculs ci-dessus montrent que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$.

Soit Z une variable aléatoire de fonction de répartition G. Alors, $Z_n \xrightarrow[\mathscr{L}]{} Z$.

> Remarque :
> Il aurait fallu en toute rigueur vérifier que G est bien la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire en montrant les points suivants :
> – G est continue à droite en tout point,
> – G est croissante sur $\mathbf{R}$,
> – $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$.
> Mais, ceci est hors programme !