DM2
à rendre le lundi / /

Exercice 1
On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t > 0, f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

1)Etudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2)Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3)a)Dresser le tableau de variation de g.

b)Justifier que g est dérivable sur $]2, +\infty[$. L'est-elle en 2 ?

c)Soit $y \in [2, +\infty[$.
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t > 0$.
En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Exercice 2
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, 3x - y + z - t).$$

1)Déterminer une base de $Kerf$, puis sa dimension. f est-elle injective ?

2)Déterminer une base de Imf, puis sa dimension. f est-elle surjective ?

3)Vérifier le théorème du rang.