EM Lyon 2019

Exercice 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1) (a) Justifier : $\forall t \in [0; +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = \mathbb{P}([U \leqslant V])$.

2) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt$.

3) **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   (a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   (b) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

   (a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

5) (a) Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) = \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) = \dfrac{1}{2}$.

(b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] = [M_n > T_0]$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n])$ en fonction de n.

(c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2) Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.
On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

5) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6) (a) Question modifiée par rapport au sujet original.
   Montrer que (u_1, u_2) est une base de $Ker(f - Id)$.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer M_1M_2.
8) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9) Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

 (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

 (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

 (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

 (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

 (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1) Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3) (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x,y) \in U$.
5) Soit $(x,y) \in U$. Montrer :

   $$(x,y) \text{ est un point critique de } h \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6) En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).
7) (a) Vérifier : $\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   (b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n).$$

8) Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    u=1
    for k in range(....,....):
        u=............
    return u
```

10) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

(c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11) (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt$.

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}dt.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :
$u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

(d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

(e) En déduire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.