

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbf{R}^3 .

On considère l'endomorphisme f de \mathbf{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de \mathbf{R}^3 défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1.
 - a. Calculer v .
 - b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de \mathbf{R}^3 .
 - c. On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .
2. On note A' la matrice de f dans la base \mathcal{C} .
 - a. Donner le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1} .
 - b. Calculer A' .
 - c. En déduire les valeurs propres de A .
 - d. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .
 A est-elle diagonalisable ?
 - e. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
3.
 - a. Déterminer la matrice B de g dans la base \mathcal{B} .
 - b. Montrer : $B^2 = 2B$.
 - c. En déduire les valeurs propres de B , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
 - d. B est-elle diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid BM = MA\}$.

4.
 - a. Montrer que \mathcal{E} est un espace vectoriel.
 - b. Soit M une matrice appartenant à \mathcal{E} .
Montrer que M n'est pas inversible. (*On pourra raisonner par l'absurde*).
5. On cherche à montrer que \mathcal{E} n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
 - a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^t A) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
 - b. En déduire que les matrices B et ${}^t A$ admettent une valeur propre en commun, notée α .
 - c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^t Y$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à \mathcal{E} .
 - d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in [b, +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6.
 - a. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
 - b. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
7.
 - a. Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n)` prenant en argument un entier n de \mathbf{N} et renvoyant la valeur de u_n .
 - b. A l'aide de la fonction `suite`, compléter la fonction Python suivante prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif et renvoyant une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon):  
    n=1  
    while ..... :  
        n=n+1  
    return(.....)
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.
10. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
11.
 - a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
 - b. Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U .
b. Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.
14. a. Écrire la matrice hessienne, notée M_a , de H au point $(a, \ln(a))$.
b. Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a - 1. \end{cases}$$

- c. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?
15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

- Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
 - Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
 - Déterminer, pour tout n de \mathbf{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
 - En déduire, pour tout k de \mathbf{N} :

$$\mathbf{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
 - Déterminer, pour tout n de \mathbf{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
 - En déduire la loi de V .
 - Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
 - Que vaut $\mathbf{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathbf{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

- a. On rappelle qu'en Python, la fonction `random()` du module `numpy.random` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1]$.

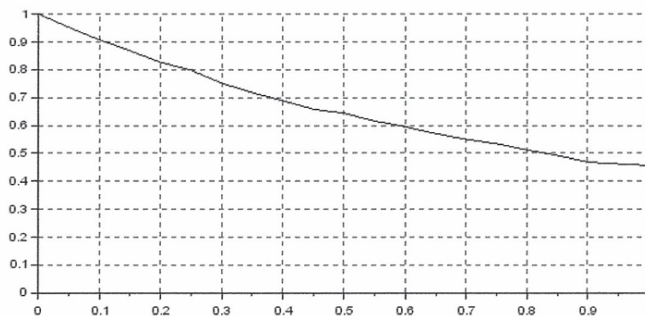
Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule_X()` :
qui simule les lancers du joueur A et renvoie la valeur de X .

- b. On suppose que l'on dispose d'une fonction d'en-tête `def simule_Y(p)`, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simulant les lancers de B et renvoyant la valeur de Y .

Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r=0
    N=10**4
    for k in range(N):
        x=simule_X()
        y=simule_Y(p)
        if x<=y:
            r=r+1/N
    return r
```

- c. On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

- a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
- c. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.
8. a. Montrer : $\mathbf{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n]) \mathbf{P}([Y \geq n])$.
- b. Déduire des résultats précédents : $\mathbf{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2 + p)^2}$.
- c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.