DM7 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1 :
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on convient que $S_0 = 0$.

1)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{(2+x)^{n+2}}\mathrm{d}x$.

2)En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \ln 2 - \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x$.

3)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ \left| \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

4)Conclure que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.

5)La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 2
1) On considère $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de A.

b) f est-il diagonalisable ? bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.
Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, ..., e_{2n+1})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n+1}$ défini par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \cup [\![n+2, 2n+1]\!],\ f(e_i) = e_1,$$
$$\text{et } f(e_{n+1}) = e_1 + ... + e_{2n+1}.$$

2) Déterminer la matrice A de f dans la base $(e_1, e_2, ..., e_{2n+1})$.

3) Déterminer le rang de f et la dimension de $Kerf$.

4) Justifier que 0 est valeur propre de f puis déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0 ainsi qu'une base de ce sous-espace propre.

5) Soit $\tilde{f}$ la restriction de f à $Im(f)$, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur u de $Im(f)$ associe $\tilde{f}(u) = f(u)$.

a) Justifier que $\tilde{f}$ est un endomorphisme de $Im(f)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_1 + ... + e_{2n+1})$ est une base de $Im(f)$.

c) Ecrire la matrice de $\tilde{f}$ dans la base $\mathscr{B}$.

d) Montrer que si λ est une valeur propre non-nulle de f et u un vecteur propre de f associé à λ, alors $u \in Im(f)$.

e) En déduire toutes les valeurs propres de f.

f) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?