

Chapitre 18 : Convergences

Les variables aléatoires considérées sont discrètes ou à densité.

I) Inégalité de Markov et ses corollaires

Théorème 1 (inégalité de Markov - redonnée au concours)

Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance.

$$\forall a > 0 : P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Théorème 2 (inégalité de Bienaymé-Tchébitchev)

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Théorème 2bis (inégalité de Bienaymé-Tchébitchev)

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

On cherche à évaluer $p = P(E(X) - 2\sigma(X) < X < E(X) + 2\sigma(X))$.

1) Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébitchev que $p \geq 0,75$.

2) Donner la valeur de p dans les cas suivants :

a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ b) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ c) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(3/4)$.

Théorème 3 (loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes, ayant la même espérance m et la même variance.

Pour tout $n \geq 1$, posons $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X_n} - m| \geq \epsilon) = 0.$$

Propriété 1 (corollaire de la loi faible des grands nombres)

On considère une expérience aléatoire constituée d'un grand nombre d'épreuves successives et indépendantes.

A chacune de ces épreuves, un événement A peut se réaliser avec la probabilité p .

Alors, la fréquence de réalisation de A lors de ces épreuves est proche de sa probabilité théorique.

démo : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, introduire $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé à l'épreuve numéro } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

II) Convergence en loi

Déf : pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de fonction de répartition F_n et soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F .

On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X si en tout point x où F est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x).$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarque

Si X est à densité, F est continue sur $\mathbf{R}$.

L'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$ devra être prouvée pour tout x réel.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires.

Pour tout $n \geq 1$, on suppose que la fonction de répartition de X_n vaut :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-x - \frac{x^2}{n}\right) & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

1) X_n est-elle à densité ?

2) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une var. al. X dont on donnera la loi.

Propriété 2 (valable uniquement pour des variables aléatoires discrètes)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes avec $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset \mathbf{Z}$.

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$.

Alors, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbf{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes de loi donnée par :

$$X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^n, P(X_n = 1) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ et } P(X_n = 2) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X discrète dont on précisera la loi.

Théorème 4

Soit $\lambda > 0$ une constante réelle et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires

telles que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Alors, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

On a donc $\forall k \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Propriété 3 (approximation de la loi binômiale par la loi de Poisson)

Si n est grand et p petit, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$.

Remarque

Cette propriété s'applique en pratique pour $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.

Exercice 4

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30, 0.1)$. Calculer une valeur approchée de $P(X = 5)$.

Théorème 5 (théorème de la limite centrée)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires (discrètes ou à densité) mutuellement indépendantes et de même loi.

Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Alors, $S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ **T.L.C**

On a donc $\forall x \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq x) = \Phi(x)$.

2) On a aussi $\forall x \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* < x) = \Phi(x)$.

3) On a enfin pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq S_n^* < b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < S_n^* < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Remarque

Posons $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$. On peut vérifier que $(\overline{X_n})^* = S_n^*$ donc le théorème précédent reste valable en remplaçant S_n^* par $(\overline{X_n})^*$.

Propriété 4 (approximation de la loi de Poisson par la loi normale)

Si λ est assez grand, on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = \lambda$ et $\sigma^2 = \lambda$.

Remarque

Cette propriété s'applique en pratique pour $\lambda \geq 15$.

Exercice 5

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(16)$. Calculer une valeur approchée de $P(X = 10)$.

Propriété 5 (approximation de la loi binômiale par la loi normale)

Si n est grand et p voisin de 0,5 on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = np$ et $\sigma^2 = npq$.

Remarque

Cette propriété s'applique en pratique pour $n \geq 30$ et $p \approx 0,5$.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.

1) Quelle est la loi suivie par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$?

2) A l'aide du T.L.C, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.