Exercice 1 (ecricome 2026)

1)$X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(X=k)=\dfrac{1}{n}$. Donc $X\hookrightarrow\mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

Le cours donne : $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

2)On a : $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

Soit $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$. Distinguons deux cas :

• $k\geq j+1$

D'après l'énoncé, l'événement $(Y>X)$ est impossible.
Donc $P(Y>X)=0$.
Or, $(X=j)\cap(Y=k)\subset(Y>X)$ donc $P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\leq P(Y>X)$.
D'où $P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)=0$.

• $k\leq j$

Si l'événement $(X=j)$ est réalisé, alors le particulier a le choix avec équiprobabilité entre j compagnies d'assurance l'année suivante (les compagnies 1,2, ..., j).

On a donc $P_{(X=j)}(Y=k)=\dfrac{1}{j}$.

On déduit :
$$\begin{aligned}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)) &= P(X=j)P_{(X=j)}(Y=k)\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{j}\\ &= \frac{1}{nj}.\end{aligned}$$

En conclusion, $\forall(j,k)\in[\![1,n]\!]^2,\ P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)=\begin{cases}\dfrac{1}{nj} & \text{si } k\leq j\\ 0 & \text{si } k\geq j+1\end{cases}$

3)Comme $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{1\leq k,j\leq n}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)=1$.

En scindant cette somme en deux, on a :

$$\sum_{1\leq k\leq j\leq n}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)+\sum_{1\leq j<k\leq n}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)=1.$$

Les termes de la deuxième somme sont nuls car $k>j$ ou encore $k\geq j+1$.

Puis, on écrit la somme de gauche en deux sommes simples, ce qui donne :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{nj}=1$.

$$\text{D'où, } \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}=n.$$

> Remarque
> Il était tout aussi rapide de calculer la somme directement :
> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{1\leq k\leq j\leq n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\times j\right)=\sum_{j=1}^{n}1=n.$

4)Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

La formule des probabilités totales pour le sce $(X=j)_{1\leq j\leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\sum_{j=1}^{n}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)+\sum_{j=k}^{n}P\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}0+\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{nj}\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}.\end{aligned}$$

5)a)$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j}=\sum_{1\leq k\leq j\leq n}\frac{k}{j}$

$$\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{j}\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}k\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1).\end{aligned}$$

b)Y est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{n}kP(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\right)\quad\text{grâce à la question 4)}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j}.\end{aligned}$$

On poursuit le calcul en utilisant la question 5)a) :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}(j+1)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\\
&= \frac{1}{2n}\times\frac{n(n+3)}{2}\\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

6)a)X et Y sont discrètes finies donc XY également.
XY admet donc une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{1\leq j,k\leq n} jkP\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\\
&= \sum_{1\leq j<k\leq n} jkP\big((X=j)\cap(Y=k)\big)+\sum_{1\leq k\leq j\leq n} jkP\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\\
&= \sum_{1\leq j<k\leq n} jk\times 0+\sum_{1\leq k\leq j\leq n} jk\times\frac{1}{nj}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq j\leq n} k\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} j(j+1).
\end{aligned}$$

b)On poursuit le calcul en développant $j(j+1)=j^2+j$ et en coupant la somme en deux :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2+\sum_{j=1}^{n}j\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Puis, en factorisant par $n(n+1)$:

$E(XY) = \dfrac{1}{2n} \times \dfrac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \dfrac{1}{2n} \times \dfrac{2n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$.

c)La formule de Huygens donne :

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4} \\
&= \frac{4(n+1)(n+2) - 3(n+1)(n+3)}{24} \\
&= \frac{n^2-1}{24}.
\end{aligned}$$

7)$n \geq 2$ donc $cov(X,Y) \neq 0$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

8)a)programme :

```
def simulXY(n):
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.randint(1,X+1)
    return(X,Y)
```

b)La fonction `Myst` renvoie $\dfrac{s_{xy}}{\sqrt{v_x}\sqrt{v_y}}$, c'est-à-dire le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (x,y).

c)La droite d'ajustement affine est une droite, ce qui exclut le tracé 1.

Elle doit passer par le point moyen, ce qui exclut le tracé 3.

Elle doit enfin épouser le mieux possible la direction du nuage de points, ce qui exclut le tracé 4.

La droite d'ajustement affine correspond donc au tracé 2.

9)a)A_n est réalisé si et seulement si X et Y prennent la même valeur. Donc $A_n = (X = Y)$.

b)La formule des probabilités totales pour le sce $(X=j)_{1 \leq j \leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(X=Y) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P\big((X=j) \cap (X=Y)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P\big((X=j) \cap (Y=j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{nj} \quad \text{d'après 2) avec } k=j \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.
\end{aligned}$$

c)Soit $j \in \mathbf{N}^*$.

$\forall t \in [j, j+1], \quad \dfrac{1}{j+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{j}$.

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes j et $j+1$, on a :

$\displaystyle\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dt.$

$\dfrac{1}{j+1} \times \big((j+1) - j\big) \leq [\ln t]_j^{j+1} \leq \dfrac{1}{j} \times \big((j+1) - j\big)$

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j} \quad (*)$$

> Remarque
> On pouvait aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.

d)En sommant à droite les inégalités $(*)$ pour j allant de 1 à n, on a :

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$.

Donc $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, puis $\dfrac{\ln(n+1)}{n} \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

La question 9)b) donne alors : $\dfrac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n)$.

En sommant à gauche les inégalités $(*)$ pour j allant de 1 à $n-1$, on a :

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big)$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$.

Et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1$

Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 \leq \ln(n)$, puis $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \ln(n)$.

En divisant membre à membre par n et en utilisant la question 9)b), on a :

$P(A_n) \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Donc $\dfrac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

e)En multipliant membre à membre par $\dfrac{n}{\ln(n)}$, on a en simplifiant :

$\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{n}{\ln(n)} \times P(A_n) \leq \dfrac{1}{\ln(n)} + 1.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\ln(n)} + 1\right) = 1$

Pour trouver la limite du membre de gauche, on écrit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

ce qui donne immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$

D'après la propriété des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)} \times P(A_n) = 1.$

Donc $P(A_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}.$

10)a)SELECT COUNT(*) FROM adherent WHERE id_2025=id_2026 ;

b)La commande crée une jointure entre la table `compagnie` et la table `adherent`.
Des enregistrements de cette jointure, elle selectionne le numéro de l'assuré ainsi que le nom de la compagnie de l'assurance souscrite en 2026.

c)SELECT compagnie,AVG(note) AS note
FROM avis GROUP BY compagnie ;

d)SELECT compagnie FROM moyenne ORDER BY note DESC ;

Exercice 2 (ecricome 2026)

Partie I

1)$x \in I \iff \dfrac{1}{1-x} > 0$ et $1-x \neq 0 \iff x < 1$. Donc $I =]-\infty, 1[$.

2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Par composée, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Par composée, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3)f est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{-\frac{-1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur I.

x	$-\infty$	1
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4)a)f est de classe C^2 sur I comme composée de fonction de classe C^2.
Elle admet un DL à l'ordre 2 en 0 donnée par la formule de Taylor-Young :

$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

$f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ donc $f(0) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc $f'(0) = 1$,

$f''(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $f''(0) = 1$.

Le DL de f à l'ordre 2 en 0 est donc : $f(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

b)Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)x + f(0)$, c'est-à-dire $y = x$.

D'après le DL trouvé, on a alors : $f(x) - x \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

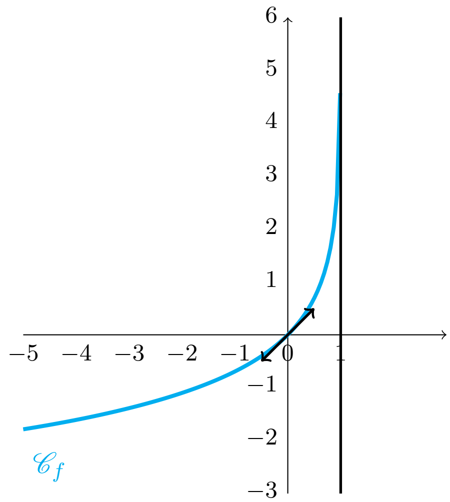
Donc $f(x) - x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

$f(x) - x$ et $\dfrac{x^2}{2}$ ont donc même signe au voisinage de 0.

Comme $\dfrac{x^2}{2} \geq 0$, on a donc $f(x) - x \geq 0$ au voisinage de 0.

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

5)Graphique



Partie II

6)a)La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge car c'est la série harmonique.

b)Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$.

Donc la suite $\big(S_n(1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est strictement croissante.

c)$S_n(1)$ est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$.

Comme cette série diverge, la suite $\big(S_n(1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge aussi.

Par ailleurs, $\big(S_n(1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = +\infty$.

7)Soit $x \in]-1,1[$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a : $0 \leq \left|\frac{x^k}{k}\right| = \frac{|x|^k}{k} \leq |x|^k$.

La série $\sum_{k\geq 1} |x|^k$ est géométrique de paramètre $|x| \in [0,1[$. Elle est donc convergente.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geq 1}\left|\frac{x^k}{k}\right|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ converge absolument.

8)a)Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_{2n+2}(-1)-S_{2n}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\\
&= \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\\
&= \frac{(2n+1)-(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)}\\
&= -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}<0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $\big(S_{2n}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

On a également :

$$\begin{aligned}
S_{2n+3}(-1)-S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}\\
&= -\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+2}\\
&= \frac{-(2n+2)+(2n+3)}{(2n+2)(2n+3)}\\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}>0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $\big(S_{2n+1}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Enfin, $\lim_{n\to+\infty}\big(S_{2n+1}(-1)-S_{2n}(-1)\big)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2n+1}=0.$

On conclut que les suites $\big(S_{2n}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\big(S_{2n+1}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.

b)Les suites $\big(S_{2n}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\big(S_{2n+1}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent donc vers la même limite L.

Donc la suite $\big(S_n(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers L.

c)La suite $\big(S_{2n+1}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et converge vers $-\ln 2$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ S_{2n+1}(-1)\leq -\ln 2$.

La suite $\big(S_{2n}(-1)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers $-\ln 2$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ -\ln 2\leq S_{2n}(-1)$.

Par recollement, on a $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ S_{2n+1}(-1)\leq -\ln 2\leq S_{2n}(-1)$.

La distance entre $S_{2n}(-1)$ et $-\ln 2$ est donc inférieure à la distance entre $S_{2n}(-1)$ et $S_{2n+1}(-1)$, ce qui se traduit par l'inégalité :

$\big|S_{2n}(-1)-(-\ln 2)\big|\leq S_{2n}(-1)-S_{2n+1}(-1)$,

c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \big|\ln 2+S_{2n}(-1)\big|\leq S_{2n}(-1)-S_{2n+1}(-1)$.

d)Par le même raisonnement, on a :

$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \big|\ln 2+S_{2n+1}(-1)\big|\leq S_{2n}(-1)-S_{2n+1}(-1)$.

De plus, on a :

$$S_{2n}(-1)-S_{2n+1}(-1)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}=-\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}.$$

Compte tenu de ce qui précède, on a donc pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$\big|\ln 2+S_{2n}(-1)\big|\leq\frac{1}{2n+1}\quad(*)\quad\text{et}\quad\big|\ln 2+S_{2n+1}(-1)\big|\leq\frac{1}{2n+1}\quad(**)$$

Maintenant distinguons deux cas :

• n pair

Posons $n=2p$, en faisant $n\to p$ dans $(*)$, on obtient :

$\big|\ln 2+S_{2p}(-1)\big|\leq\dfrac{1}{2p+1}$, c'est-à-dire : $\big|\ln 2+S_n(-1)\big|\leq\dfrac{1}{n+1}$.

Or, $\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{n}$ donc par recollement : $\big|\ln 2+S_n(-1)\big|\leq\dfrac{1}{n}$.

• n impair

Posons $n=2p+1$, en faisant $n\to p$ dans $(**)$, on obtient :

$\big|\ln 2+S_{2p+1}(-1)\big|\leq\dfrac{1}{2p+1}$, c'est-à-dire : $\big|\ln 2+S_n(-1)\big|\leq\dfrac{1}{n}$.

Ainsi, $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \big|\ln 2+S_n(-1)\big|\leq\dfrac{1}{n}$.

9)a)$x>1$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{x^k}{k}=+\infty$ par croissances comparées.

Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ diverge.

b)C'est le même raisonnement que pour la question 6)c).

En effet, la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et divergente.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=+\infty$.

Partie III

10)a) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-t}dt = [-\ln(1-t)]_0^a = -\ln(1-a) + \ln 1 = -\ln(1-a)$.

$$\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2}dt = \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{1-(1-a)}{1-a} = \frac{a}{1-a}.$$

b)
$$\begin{aligned}
R_1(a) &= \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2}dt \\
&= \int_0^a \frac{(a-1)+(1-t)}{(1-t)^2}dt \\
&= \int_0^a \frac{a-1}{(1-t)^2}dt + \int_0^a \frac{1-t}{(1-t)^2}dt \\
&= (a-1)\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2}dt + \int_0^a \frac{1}{1-t}dt \\
&= (a-1) \times \frac{a}{1-a} - \ln(1-a) \quad \text{d'après 10)a)} \\
&= -a + f(a).
\end{aligned}$$

Donc $f(a) = a + R_1(a)$.

11)On effectue une IPP dans $R_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}}dt$ en posant :

$$u'(t) = (a-t)^n \qquad v(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} = (1-t)^{-n-1}$$

$$u(t) = -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \qquad v'(t) = (n+1)(1-t)^{-n-2} = \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,a]$. L'IPP est légitime et donne :

$$\begin{aligned}
R_n(a) &= \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(1-t)^{n+1}}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \times \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}dt \\
&= 0 + \frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}dt \\
&= \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a).
\end{aligned}$$

12)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $f(a) = S_1(a) + R_1(a)$.

Or, $S_1(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{a^k}{k} = a$. Et $\mathscr{P}(1)$ est alors vraie, grâce à la question 10)b).

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Remarquons que $S_{n+1}(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k} + \frac{a^{n+1}}{n+1} = S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

En partant de l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
f(a) &= S_n(a) + R_n(a) \\
&= S_{n+1}(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_n(a) \\
&= S_{n+1}(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1} + \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)\right) \quad \text{d'après 11)} \\
&= S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a).
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

13)a)Soit $t \in [0, a]$.

On a alors $a - t \geq 0$. De plus, comme $a < 1$, on a $t < 1$ donc $1 - t \geq 0$.

Par quotient, $\dfrac{a-t}{1-t} \geq 0$.

De plus, on a :

$$\frac{a-t}{1-t} \leq a \iff \frac{a-t}{1-t} - a \leq 0 \iff \frac{a-t-a(1-t)}{1-t} \leq 0 \iff \frac{(a-1)t}{1-t} \leq 0.$$

La dernière inégalité est vraie car $a - 1 < 0$, $t \geq 0$ et $1 - t > 0$.

Donc $\dfrac{a-t}{1-t} \leq a$.

On conclut que $\forall t \in [0, a],\ 0 \leq \dfrac{a-t}{1-t} \leq a$.

b)Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, on déduit :

$$\forall t \in [0, a],\ 0 \leq \left(\frac{a-t}{1-t}\right)^n \leq a^n \qquad (*)$$

De plus, on a : $-t \geq -a$, puis $1 - t \geq 1 - a > 0$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [0, a],\ 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a} \qquad (**)$$

En multipliant les inégalités $(*)$ et $(**)$ dont les membres sont positifs :

$$\forall t \in [0, a],\ 0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-a}.$$

On intègre entre les bornes croissantes 0 et a, ce qui donne :

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt$$

avec $\displaystyle\int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt = R_n(a)$ et $\displaystyle\int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt = \frac{a^n}{1-a} \times (a - 0) = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

On conclut que $0 \leq R_n(a) \leq \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$.

c)$a \in [0, 1[$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} R_n(a) = 0$.

On sait également que $\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = S(a)$.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité 12, on conclut que $f(a) = S(a)$.

14)La question 12) avec $a = 1/2$ donne :

$f\left(\frac{1}{2}\right) = S_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$ et $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

On déduit : $\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = R_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad (*)$

Puis, la question 13)b) avec $a = 1/2$ donne : $0 \le R_n\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$,

c'est-à-dire : $0 \le R_n\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2^n}$.

En remplaçant dans $(*)$, on a : $0 \le \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \le \frac{1}{2^n}$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\right| \le \frac{1}{2^n}$.

b)Programme

```
def val(eps):
    s=0
    k=0
    while 1/2**k>eps:
        k=k+1
        s=s+1/(k*2**k)
    return s
```

c)La suite $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante, c'est la suite avec les points.

La suite $\left(-S_n(-1)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est alternée, d'après l'étude faite en 8), c'est donc la suite avec les croix.

Exercice 3 (ecricome 2026)

Partie I

1)x et y sont solutions de $(\mathscr{C})$. On a donc pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$x'(t) = x(t) + y(t)$ et $y'(t) = -x(t) - y(t)$.

En ajoutant ces égalités, on obtient : $x'(t) + y'(t) = 0$, c'est-à-dire :
$\forall t \in \mathbf{R},\ s'(t) = 0$.

2)La fonction s est donc constante. En notant K cette constante, on a $\forall t \in \mathbf{R},\ s(t) = K$.

De plus, $s(0) = x(0) + y(0) = 1 + 1 = 2$ donc $K = 2$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R},\ x(t) + y(t) = 2$.

3)On obtient alors pour tout $t \in \mathbf{R}$: $x'(t) = 2$ et $y'(t) = -2$.

Il existe donc des constantes réelles a et b telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$x(t) = 2t + a$ et $y(t) = -2t + b$.

Comme $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$, cela impose que $a = 1$ et $b = 1$.

Donc $\forall t \in \mathbf{R},\ x(t) = 2t + 1$ et $y(t) = -2t + 1$.

Réciproquement, on vérifie facilement que le couple (x, y) de fonctions ci-dessus vérifie le problème $(\mathscr{C})$.

Ainsi, $(\mathscr{C})$ a pour unique solution $(t \mapsto 2t + 1, t \mapsto -2t + 1)$.

Partie II

4)P est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc P est inversible.

D'après le cours, l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{1 \times 1 - 0 \times (-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5)λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$

$\Longleftrightarrow (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 \times (-1) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 0$.

Donc 0 est l'unique valeur propre de A.

6)Supposons que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telle que $A = QDQ^{-1}$.

La diagonale de D est constituée des valeurs propres de A donc de zéros.

Ainsi, $D = 0$.
On a alors : $A = Q0Q^{-1} = 0$, ce qui est absurde.

Donc A n'est pas diagonalisable.

7)$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= J$.

8)Les états d'équilibre du système $(\mathscr{S})$ sont les couples de fonctions constantes solutions de $(\mathscr{S})$.

Soient a et b deux constantes. Soient $x : t \mapsto a$ et $y : t \mapsto b$.

(x, y) est solution de $(\mathscr{S})$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ x'(t) = x(t) + y(t) \ \text{ et } \ y'(t) = -x(t) - y(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ 0 = a + b \ \text{ et } \ 0 = -a - b$

$\iff b = -a$.

Donc les points d'équilibres de $(\mathscr{S})$ sont les couples $(a, -a)$ où $a \in \mathbf{R}$.

> Remarque
> On pouvait aussi déterminer $E_0(A)$, puis utiliser que (a, b) est un point d'équilibre de $(\mathscr{S})$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

9)Remarquons d'abord que la question 7) donne : $A = PJP^{-1}$.

(x, y) est solution de $(\mathscr{S})$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = PJP^{-1}X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \left(P^{-1}X\right)'(t) = JP^{-1}X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = JY(t)$.

> Remarque
> Comme P^{-1} est à coefficients constants, on a : $\left(P^{-1}X\right)'(t) = P^{-1}X'(t)$.
> Un petit calcul est nécessaire pour le vérifier.

10)Posons $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

$\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = JY(t)$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ u'(t) = v(t)$ et $v'(t) = 0$
$\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R},\ u'(t) = a$ et $v(t) = a$
$\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R},\ u'(t) = a$ et $v(t) = a$
$\Longleftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R},\ u(t) = at + b$ et $v(t) = a$.

Les solutions du système différentiel $Y'(t) = JY(t)$ sont donc les couples de fonctions $t \mapsto (at + b, a)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

11)On utilise les questions précédentes.

(x,y) est solution de $\mathscr{S}$
$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = JY(t)$
$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid X(t) = PY(t)$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ a \end{pmatrix}$.
$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at+b \\ a \end{pmatrix}$.
$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid X(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ -at-b+a \end{pmatrix}$.
$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid x(t) = at + b$ et $y(t) = -at - b + a$.

Les solutions de $\mathscr{S}$ sont donc les fonctions $t \mapsto (at + b, -at - b + a)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Partie III

12)Un premier programme possible :

```
def nil(M):
    n=len(M)
    k=1
    puissance=M
    zero=np.zeros(n)
    while (puissance==zero).all()==False and k<=n:
        k=k+1
        puissance=al.matrix_power(M,k)
    if (puissance==zero).all()==True:
        return k
    else:
        return 0
```

> Remarque
> En Python, dès qu'un return est exécuté, la fonction s'arrête immédiatement. Il est donc possible de faire un programme un peu plus simple avec la boucle `for`, voir ci-dessous.

Deuxième programme possible :

```
def Nil(M):
    n=len(M)
    zero=np.zeros(n)
    puissance=np.eye(n)
    for k in range(1,n+1):
        puissance=al.matrix_power(M,k)
        if (puissance==zero).all()==True:
            return k
    return 0
```

13)N est non nulle et nilpotente d'ordre p. On a donc $p \geq 2$, $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

Le polynôme X^p est donc un polynôme annulateur de N. Le spectre de N est alors contenu dans l'ensemble des racines de X^p.
Or, X^p a 0 comme unique racine. Donc $sp(N) \subset \{0\}$.

Par ailleurs, N n'est pas inversible. En effet, si elle l'était, toute puissance de N le serait. N^p serait donc inversible, ce qui est absurde car elle est nulle.
Ainsi, N n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de N.
Donc $\{0\} \subset sp(N)$.

En conclusion, par double inclusion : $sp(N) = \{0\}$.

14)On peut faire le même raisonnement que dans la question 6.

Supposons que N soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telle que $N = QDQ^{-1}$.
La diagonale de D est constituée des valeurs propres de N donc de zéros.
Ainsi, $D = 0$.
On a alors : $N = Q0Q^{-1} = 0$, ce qui est absurde.

Donc N n'est pas diagonalisable.

15)Comme X_0 ne dépend pas de t, on a $\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = B'(t)X_0$.

Avec $B(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!}N^k = I_n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!}N^k$.

Donc $\forall t \in \mathbf{R},\ B'(t) = 0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{kt^{k-1}}{k!}N^k = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^k$.

D'où $\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^k X_0$.

16)Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned}
X'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \quad \text{car } N^p = 0 \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} N^{j+1} X_0 \quad \text{ en posant } j = k-1 \\
&= N \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} N^j X_0 \\
&= N B(t) X_0 \\
&= N X(t).
\end{aligned}$$

Donc X est solution de $\mathscr{E}$.

De plus, $X(0) = B(0)X_0 = I_n X_0 = X_0$.

Ainsi, X est bien solution du problème de Cauchy et on sait que c'est la seule d'après le cours.

17)Programme :

```
def B(N,t):
    if Nil(N)==0:
        return("N n'est pas nilpotente")
    else:
        T=np.eye(len(N))
        S=T
        for k in range(1,Nil(N)):
            T=t/k*np.dot(T,N)
            S=S+T
        return S
```