

Chapitre 16 : Variables aléatoires à densité

I) Introduction

Les variables aléatoires rencontrées ici ont deux particularités :

- $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.
- $\forall x \in \mathbf{R}, P(X = x) = 0$.

Pour celles-ci, on s'intéresse à la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle donné, par exemple : $P(a < X < b)$, $P(X \geq a)$, etc ...

Exemple

Considérons une ampoule dont la durée de vie maximale est de 1000 h.

Soit X = durée de vie de l'ampoule.

X est une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = [0, 1000]$.

La probabilité pour que l'ampoule meurt à un instant précis est nulle, ce qui se traduit par $\forall x \in \mathbf{R}, P(X = x) = 0$.

En revanche, la probabilité, par exemple que l'ampoule ait une durée de vie comprise entre 100h et 200h n'est pas nulle, elle vaut $P(100 \leq X \leq 200)$.

II) Densité

Déf : on dit qu'une fonction f est une densité si :

- f est continue sur $\mathbf{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points),
- $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

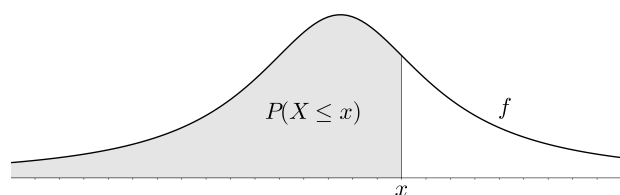
Déf : soit X une variable aléatoire.

On dit que X est à densité s'il existe une densité f telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

On dit alors que X a pour densité f .

L'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) > 0\}$ est appelé support de X et noté $X(\Omega)$.



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Montrer que f est une densité.

Propriété 1

Pour tout x réel et toute variable aléatoire X de densité f , on a :

- $P(X = x) = 0$,
- $P(X < x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$,
- $P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$.

Remarque

Si X a pour densité f , toute fonction g positive, égale à f , sauf en un nombre fini de points, est encore une densité de X .

III) Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire à densité, de densité f .

On appelle fonction de répartition de X la fonction, notée F , définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F .

- 1) F est croissante sur $\mathbf{R}$.
- 2) F est continue sur $\mathbf{R}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- 4) F est de classe C^1 en tout point où f est continue.

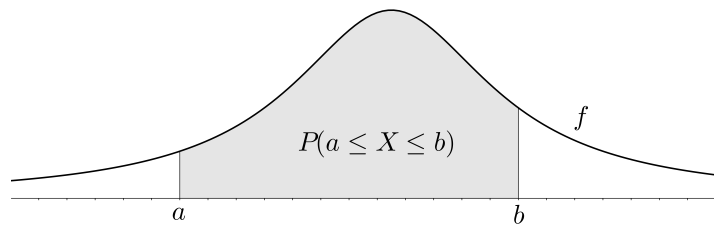
Propriété 3

Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F .

Pour tous réels a et b (avec $a \leq b$), on a :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Et toutes ces probabilités valent $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$



Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Déterminer la fonction de répartition F de X , puis tracer l'allure de (C_f) et (C_F) .

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire et F sa fonction de répartition.

X est à densité si et seulement si F est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).

Toute densité f de X vaut alors :

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{aux points où } F \text{ est dérivable} \\ \text{une valeur positive ou nulle arbitraire} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3

Soit X , une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

1) Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

2) Déterminer une densité f de X .

IV) Fonction d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire à densité et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

Par composition, on définit la variable aléatoire $Y = g \circ X$, notée $Y = g(X)$.

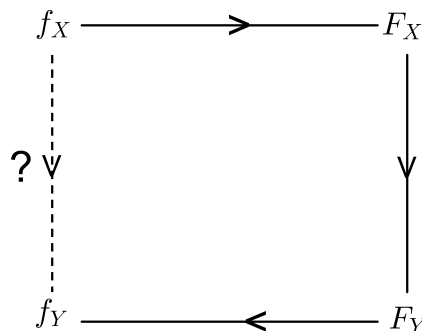
Propriété 4

Soit X une variable aléatoire de densité f_X , de fonction de répartition F_X .

Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

Dans la plupart des cas, $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à densité.

En notant F_Y la fonction de répartition de Y , une densité f_Y de Y se détermine à l'aide du schéma suivant :



Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

2) Pour chacun des cas suivants, déterminer une densité f_Y de Y :

a) $Y = 2X + 1$ b) $Y = \ln X$ c) $Y = e^X$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Pour chacun des cas suivants, déterminer la fonction de répartition F_Y de Y :

1) $Y = |X|$ 2) $Y = X^2$.

V) Espérance d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire de densité f .

On dit que X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente.

On appelle alors espérance de X le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X à densité est centrée si $E(X) = 0$.

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire à densité. Soient a et b deux réels quelconques.

Si X admet une espérance, alors $aX + b$ admet une espérance. De plus, on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Remarque

On a en particulier $E(aX) = aE(X)$ et $E(X + b) = E(X) + b$.

Théorème 2 (espérance d'une somme)

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

Alors, $X + Y$ est à densité et admet une espérance donnée par :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Remarque

L'espérance est linéaire.

Théorème 3 (théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire de densité f .

Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$ (sauf éventuellement en quelques points).

Soit $Y = g(X)$.

Alors, Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ est absolument convergente. De plus, on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt.$$

Exercice 6

Soient $\lambda > 1$ une constante et X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2) Soit $Y = e^X$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

VI) Variance et écart-type d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.

On dit que X admet une variance si $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$ est convergente.

On appelle variance de X le nombre réel positif, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt.$$

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X à densité est réduite si $V(X) = 1$.

Déf : soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance.

On appelle écart-type de X , le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 4 (formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.

Alors, X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.

De plus, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété 6

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance.

Soient a et b deux réels quelconques. Alors $aX + b$ admet une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété 7

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et une variance.

Alors, la variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

VII) Variables aléatoires à densité indépendantes

Déf : on dit que les variables aléatoires à densité X et Y sont indépendantes si $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$.

Déf : on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, P((X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)) = P(X_1 \leq x_1) \dots P(X_n \leq x_n).$$

Théorème 5

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité admettant une variance.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et on a :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Théorème 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 \dots X_n$ admet une espérance et on a :

$$E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n).$$

Propriété 8 (lemme des coalitions)

Si les variables aléatoires à densité $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de certaines d'entre elles est indépendante de toute variable aléatoire fonction des autres.