

---

DS1 ecg2 - maths appliquées  
23/09/2026

**Exercice 1**

Soit  $F$  la partie de  $\mathbf{R}^3$  définie par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

1)a) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  et préciser une famille génératrice de  $F$ .

b) Déterminer une base de  $F$ , puis préciser la dimension de  $F$ .

2) On considère les vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  donnés par :  $u = (2, -3, 1)$ ,  $v = (3, 1, 7)$  et  $w = (1, 1, -1)$ .

a) Les vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  appartiennent-ils à  $F$  ?

b) Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .

3) Soit le vecteur  $x = (1, 3, \gamma)$  où  $\gamma$  est un paramètre réel.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\gamma$  pour que  $x \in \text{Vect}(v, w)$ .

**Exercice 2**

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $F$  la partie de  $\mathbf{R}^n$  définie par :

$$F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le vecteur  $e_i$  a donc toutes ses composantes nulles, sauf la  $i$ -ème qui vaut 1.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on pose  $u_i = e_i - e_n$ .

1) Montrer que  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ .

2) Montrer que  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  est une base de  $F$ . En déduire la dimension de  $F$ .

3) On suppose dans cette question que  $n = 4$ . On pose  $w = (1, 1, 1, 1)$ .

a) Écrire la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  à  $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, w)$ .

b) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Que peut-on conclure pour  $\mathcal{C}$  ?

c) Soit  $u = (1, 2, 3, 4)$ . Calculer les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

4) On revient au cas général où  $n \geq 2$ .

Soit  $w = (y_1, \dots, y_n)$  un vecteur quelconque de  $\mathbf{R}^n$ . On note  $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_{n-1}, w)$ .

a) On suppose que  $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ . Justifier que la famille  $\mathcal{C}$  est liée.

b) On suppose que  $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbf{R}^n$ .

---

### Exercice 3

On considère les matrices d'ordre 3 suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note  $f$  l'application qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  associe la matrice :

$$f(M) = HMG - GMH$$

Partie A :

- 1) Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
- 2) Calculer les matrices  $D = P^{-1}GP$  et  $\Delta = P^{-1}HP$ , puis vérifier qu'elles sont diagonales.
- 3) Calculer  $H^2$ ,  $HG$  et  $GH$ .
- 4) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H^n G = GH^n$ .

Partie B :

- 1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .
- 2) Montrer à l'aide de la partie A que les matrices  $I$ ,  $H$  et  $H^2$  appartiennent à  $\text{Ker } f$  puis conclure que  $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$ .
- 3) Montrer que la famille  $(I, H, H^2)$  est liée puis conclure que  $\dim(\text{Ker } f) \geq 2$ .

Partie C :

- 1) Montrer que  $M \in \text{Ker } f \iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta$ .
- 2) Soit  $X$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

$$\text{Montrer que } \Delta XD = DX\Delta \iff X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

- 3) Dédurre des questions C1 et C2 :

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

- 4) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  puis donner la dimension de  $\text{Ker } f$ .
- 5) En déduire la dimension de  $\text{Im } f$ .

---

**Exercice 4**

1) Montrer que  $\forall x > 0, x - \ln x > 0$ .

2) On définit alors la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0 et que  $f'_d(0) = 0$ .

c) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

e) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

f) On donne  $e \approx 2,7$ .

Tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$  ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.