
Exercice 1 (ecricome 2005)**Partie I :**

1) Le discriminant vaut : $\Delta = q^2 + 4pq > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 données par :

$$r_1 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ (avec } r_1 < r_2 \text{)}.$$

On déduit :

$$r_1 + r_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} + \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} = q.$$

$$r_1 r_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} \times \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{q^2 - \Delta}{4} = -pq.$$

$$2) f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2,$$

$$f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2,$$

$$f(0) = -pq.$$

3) f est continue sur $[0, 1]$. De plus $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $]0, 1[$.

De même, comme $f(-1)$ et $f(0)$ sont de signes contraires, f s'annule sur $] -1, 0[$.

Comme f s'annule exactement deux fois en r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$), cela entraîne que $r_1 \in] -1, 0[$ et $r_2 \in]0, 1[$.

On a donc $|r_2| = r_2 < 1$.

De plus, $|r_2| - |r_1| = r_2 - (-r_1) = r_1 + r_2 = q > 0$. Donc $|r_1| < |r_2|$.

Partie II :

Pour cette partie, on notera pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

P_k = « on fait pile au k -ième lancer » et F_k = « on fait face au k -ième lancer ».

$$\begin{aligned} 1) a_1 &= P(P_1 \cap P_2) \\ &= P(P_1)P(P_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1)P(P_2)P(P_3) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2 q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= P((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)) \\
&= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \quad \text{par incompatibilité} \\
&= P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(P_4) + P(F_1)P(F_2)P(P_3)P(P_4) \quad \text{par indépendance} \\
&= p^3 q + p^2 q^2 \\
&= p^2 q(p + q) \\
&= p^2 q.
\end{aligned}$$

2) • $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements car ils sont incompatibles deux à deux et leur réunion fait l'univers.

$$\begin{aligned}
\text{On a donc } A_{n+2} &= (F_1 \cap A_{n+2}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap A_{n+2}) \cup (P_1 \cap P_2 \cap A_{n+2}) \\
&= (F_1 \cap A_{n+2}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap A_{n+2}) \cup (A_1 \cap A_{n+2}).
\end{aligned}$$

Les événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont incompatibles deux à deux.

Comme $n + 2 > 1$, on a donc $A_1 \cap A_{n+2} = \emptyset$.

$$\text{Donc } A_{n+2} = (F_1 \cap A_{n+2}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap A_{n+2}).$$

On déduit par incompatibilité :

$$P(A_{n+2}) = P(F_1 \cap A_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2 \cap A_{n+2}).$$

$$\text{Puis, } P(A_{n+2}) = P(F_1)P_{F_1}(A_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2)P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) \quad (*)$$

• Déterminons chacune des probabilités ci-dessus :

$$P(F_1) = q.$$

$$P(P_1 \cap F_2) = pq.$$

Calculons $P_{F_1}(A_{n+2})$. Supposons F_1 réalisé.

Pour réaliser A_{n+2} , il reste $n + 1$ lancers à effectuer où il faut obtenir pour la première fois deux piles consécutifs aux dernier lancer et à l'avant-dernier lancer.

$$\text{Donc } P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1}).$$

Calculons $P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2})$. Supposons $P_1 \cap F_2$ réalisé.

Pour réaliser A_{n+2} , il reste n lancers à effectuer où il faut obtenir pour la première fois deux piles consécutifs aux dernier lancer et à l'avant-dernier lancer.

$$\text{Donc } P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = P(A_n).$$

En reportant ces probabilités dans $(*)$, on obtient :

$$P(A_{n+2}) = qP(A_{n+1}) + pqP(A_n), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0.$$

3) Programme

```
def suite(n,p,q):  
    u=0  
    v=p**2  
    for k in range(2,n+1):  
        w=q*v+p*q*u  
        u=v  
        v=w  
    return w
```

ou plus simplement, à l'aide d'affectations parallèles :

```
def suite(n,p,q):  
    u=0  
    v=p**2  
    for k in range(2,n+1):  
        (u,v)=(v,q*v+p*q*u)  
    return v
```

4) La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est linéaire d'ordre deux. Son équation caractéristique est : $x^2 - qx - pq = 0$ dont les solutions sont r_1 et r_2 .

D'après le cours, il existe des réels c et d telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = cr_1^n + dr_2^n$.

Les données $a_0 = 1$ et $a_1 = p^2$ mènent au système :

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ cr_1 + dr_2 = p^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = -d \\ -dr_1 + dr_2 = p^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = -\frac{p^2}{r_2 - r_1} \\ d = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

En reportant les valeurs de c et d , on déduit : $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^n - r_1^n)$.

5) Comme $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_2^n = 0$,

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, ce qui ne permet pas d'avoir un équivalent de a_n !

L'idée est d'utiliser que $|r_1| < |r_2|$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \right) = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n = 0$$

du fait que $0 < \left| \frac{r_1}{r_2} \right| = \frac{|r_1|}{|r_2|} < 1$.

Donc $r_2^n - r_1^n \underset{+\infty}{\sim} r_2^n$.

On conclut que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1}$.

Partie III :

$$\begin{aligned}
 1) \forall n \in \mathbf{N}, AX_n &= \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)a_{n+1} - r_1 r_2 a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} qa_{n+1} + pqa_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{grâce à I)1)} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= X_{n+1}.
 \end{aligned}$$

2) Les matrices $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ et $A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ ont un déterminant nul.

Donc elles ne sont pas inversibles.

3) La question précédente montre que r_1 et r_2 sont des valeurs propres de A .

Elles sont distinctes et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Donc A est diagonalisable.

4) Le déterminant de P vaut : $r_1 - r_2 \neq 0$ donc P est inversible. On cherche son inverse par la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - r_1 L_2 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} r_1(r_2 - r_1) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow (r_2 - r_1)L_1 - r_2 L_2 \\ L_2 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ \frac{1}{r_2 - r_1} & -\frac{r_1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{r_1(r_2 - r_1)} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{r_2 - r_1} L_2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
5) D &= P^{-1}AP \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 r_2 \\ r_2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1^2 + r_1 r_2 & 0 \\ 0 & r_2^2 - r_1 r_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1(r_2 - r_1) & 0 \\ 0 & r_2(r_2 - r_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll X_n = PD^n P^{-1} X_0 \gg$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : $\ll X_0 = PD^0 P^{-1} X_0 \gg$, ce qui est vrai car $PD^0 P^{-1} = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= AX_n \\
&= APD^n P^{-1} X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= PDP^{-1} PD^n P^{-1} X_0 \\
&= PD^{n+1} P^{-1} X_0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_n = PD^n P^{-1} X_0$.

$$\begin{aligned}
7) PD^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \\ r_1^n & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2^{n+1} - r_1^{n+1} & r_2 r_1^{n+1} - r_1 r_2^{n+1} \\ r_2^n - r_1^n & r_2 r_1^n - r_1 r_2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{De plus, } X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned}
X_n &= PD^n P^{-1} X_0 \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2^{n+1} - r_1^{n+1} & r_2 r_1^{n+1} - r_1 r_2^{n+1} \\ r_2^n - r_1^n & r_2 r_1^n - r_1 r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} p^2 (r_2^{n+1} - r_1^{n+1}) \\ p^2 (r_2^n - r_1^n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, on obtient en identifiant : $a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^n - r_1^n)$.

Partie IV :

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n + 1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^n - r_1^n) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} (r_2^n - r_1^n) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=0}^{+\infty} (r_2^n - r_1^n) \quad \text{car le terme d'indice 0 est nul} \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r_2^n - \sum_{n=0}^{+\infty} r_1^n \right) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{1 - r_2} - \frac{1}{1 - r_1} \right) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{(1 - r_1) - (1 - r_2)}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \\ &= \frac{p^2}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \\ &= \frac{p^2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} \\ &= \frac{p^2}{1 - q - pq} \\ &= 1. \end{aligned}$$

car $1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2$.

✓ Les séries $\sum_{n \geq 0} r_1^n$ et $\sum_{n \geq 0} r_2^n$ sont des séries géométriques convergentes car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

2) T admet une espérance si la série $\sum_{n \geq 2} nP(T = n)$ est absolument convergente.

Les termes de cette série étant positifs, on est ramené à montrer la convergence simple.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$nP(T = n) = na_{n-1} = n \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^{n-1} - r_1^{n-1}) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} nr_2^{n-1} - \frac{p^2}{r_2 - r_1} nr_1^{n-1}.$$

Les séries $\sum_{n \geq 2} nr_2^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} nr_1^{n-1}$ sont convergentes car ce sont des séries dérivées premières dont le paramètre est dans $] -1, 1[$.

Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum_{n \geq 2} nP(T = n)$ converge. Donc T admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T = n) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} nr_2^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} nr_1^{n-1} \right) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nr_2^{n-1} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} nr_1^{n-1} + 1 \right) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{(1 - r_2)^2} - \frac{1}{(1 - r_1)^2} \right) \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2}{(1 - r_1)^2(1 - r_2)^2} \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{((1 - r_1) - (1 - r_2))((1 - r_1) + (1 - r_2))}{(1 - r_1)^2(1 - r_2)^2} \\ &= \frac{p^2}{\cancel{r_2} - \cancel{r_1}} \times \frac{(\cancel{r_2} - \cancel{r_1})(2 - (r_1 + r_2))}{((1 - r_1)(1 - r_2))^2} \\ &= \frac{p^2(2 - q)}{p^4} \quad \text{car } (1 - r_1)(1 - r_2) = p^2 \text{ voir IV)1)} \\ &= \frac{2 - q}{p^2} \\ &= \frac{1 + p}{p^2} \quad \text{car } q = 1 - p. \end{aligned}$$

Exercice 2 (ecricome 2023)

1)a) $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ par composée de fonctions dérivables.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

Par quotient, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x}{2}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2x} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2x} \times \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2x} \times \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 0, f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x)$.

b) $\forall x > 0, f(x) > 0$ et $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$e^{1/2}$	$+\infty$

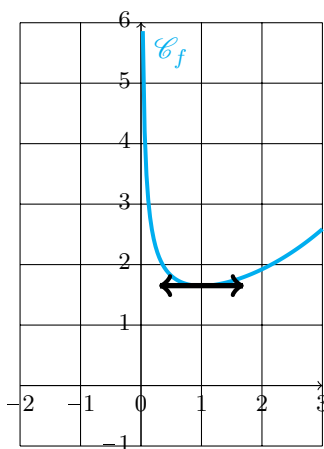
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$, par composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x}{2}} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x^{1/2}} = +\infty$ par croissances comparées.

c)



d) Soit $n \geq 2$ un entier.

- f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0, 1[$. Elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $]e^{1/2}, +\infty[$.

Comme $e < 4$, on a $e^{1/2} < 2$ donc $n \in]e^{1/2}, +\infty[$.

n admet alors un unique antécédent u_n par f dans $]0, 1[$.

Ainsi, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n sur $]0, 1[$.

- En appliquant de même le théorème de bijection sur $]1, +\infty[$ où f est continue et strictement croissante, on montre que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution v_n sur $]1, +\infty[$.

- On a enfin $f(1) = e^{1/2} \neq n$.

On conclut que l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < 1$ et $v_n > 1$.

2)a) Par construction de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$, on a $\forall n \geq 2, f(v_n) = n$ et donc également $f(v_{n+1}) = n + 1$.

Comme $n + 1 \geq n$, on a donc $\forall n \geq 2, f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$.

Comme f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans $[1, +\infty[$, on a donc $\forall n \geq 2, v_{n+1} \geq v_n$.

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b) Comme $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante, elle admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Cette limite peut être un réel L ou valoir $+\infty$.

Supposons que cette limite vaut $L \in \mathbf{R}$.

Comme $\forall n \geq 2, v_n > 1$, on a $L \geq 1$ par passage à la limite.

Par continuité de f en L , on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(L)$.

Cependant, comme $f(v_n) = n$, on a aussi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Ce qui mène à une contradiction.

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3)a) C'est le même raisonnement qu'en 2)a).

Par construction de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, on a $\forall n \geq 2, f(u_n) = n$ et donc également $f(u_{n+1}) = n + 1$.

Comme $n + 1 \geq n$, on a donc $\forall n \geq 2, f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$.

Comme f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $[0, 1]$, on a donc $\forall n \geq 2, u_{n+1} \leq u_n$.

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

b) $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente vers une certaine limite l , d'après le théorème de la limite monotone.

c) Comme $\forall n \geq 2, 0 < u_n < 1$, on a par passage à la limite : $0 \leq l \leq 1$.

Supposons que $l \in]0, 1]$.

Par continuité de f en l , on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Cependant, comme $f(u_n) = n$, on a aussi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Ce qui mène à une contradiction. Donc $l = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

d) • Pour tout $n \geq 2$, on a : $f(u_n) = n \iff \frac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n \iff \frac{e^{u_n}}{u_n} = n^2$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n}$.

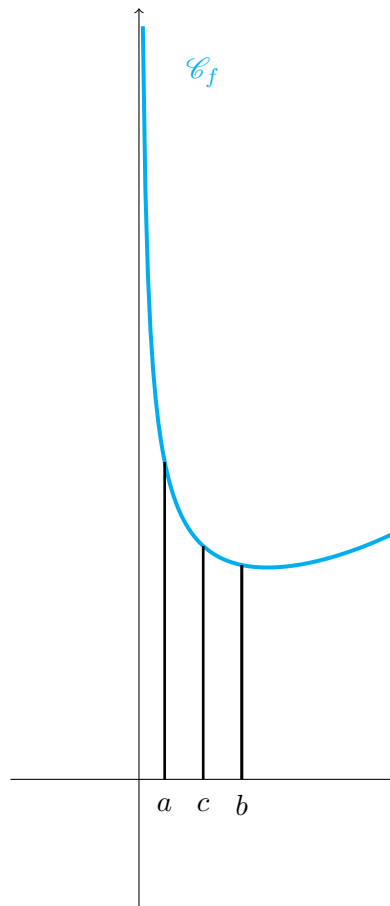
Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, on a par composée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$.

• La limite ci-dessus peut s'écrire sous la forme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

4)a)



L'intervalle $[a, b]$ qu'on construit à chaque étape doit toujours contenir u_n .

- si $f(c) < n = f(u_n)$, on a $c > u_n$ par décroissance de f .

u_n est à gauche de c , on rétrécit alors l'intervalle $[a, b]$ en prenant $b = c$.

- si $f(c) > n = f(u_n)$, on a $c < u_n$ par décroissance de f .

u_n est à droite de c , on rétrécit alors l'intervalle $[a, b]$ en prenant $a = c$.

On continue cette construction tant que l'écart entre a et b est supérieur à $eps = \epsilon$.

Au moment où cet écart est inférieur à $eps = \epsilon$, on sort de la boucle.

$\frac{a+b}{2}$ et u_n sont alors dans un intervalle $[a, b]$ dont la longueur est $b-a < \epsilon$.

On est donc sûr que $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de u_n à ϵ près.

```
import numpy as np
def approx_u(n,eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c)<n:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```

b)programme :

```
def sp(N,eps):
    s=0
    for n in range(2,N+1):
        s=s+approx_u(n,eps/(N-1))
    return s
```

Explications :

Pour tout $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, notons a_n la valeur approchée de u_n à $\frac{\epsilon}{N-1}$ près donnée par $\text{approx_u}(n, \epsilon/(N-1))$.

On a alors $\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $a_n - \frac{\epsilon}{N-1} \leq u_n \leq a_n + \frac{\epsilon}{N-1}$.

En sommant ces inégalités pour $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, on a :

$$\sum_{n=2}^N a_n - \epsilon \leq \sum_{n=2}^N u_n \leq \sum_{n=2}^N a_n + \epsilon.$$

Ceci prouve que $\sum_{n=2}^N a_n$ est une valeur approchée de $\sum_{n=2}^N u_n$ à ϵ près.

Exercice 3 (ecricome 2024)**Partie I**

1)a) M est symétrique donc diagonalisable.

$$\text{b)} M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ puis } (M + I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On constate que $(M + I)^2 = 3(M + I)$, ce qui en développant donne : $M^2 + 2M + I = 3M + 3I$, soit $M^2 - M - 2I = 0$.

Posons $P(X) = X^2 - X - 2$. On a : $P(M) = M^2 - M - 2I = 0$.

Donc P est un polynôme annulateur de M .

c)• D'après le cours, $sp(M) \subset \{\text{racines de } P\}$.

Les racines de P sont -1 et 2 . Donc $sp(M) \subset \{-1, 2\}$.

Les seules valeurs propres possibles de M sont donc -1 et 2 .

$$\bullet E_{-1}(M) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M + I)U = 0\}. \text{ Posons } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(M + I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

$$\iff x = -y - z.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_{-1}(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y - z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$E_{-1}(M)$ n'est pas nul donc -1 est valeur propre de M .

De plus, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(M)$.

Elle est libre (vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de $E_{-1}(M)$.

$$\bullet E_2(M) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M - 2I)U = 0\}. \text{ Posons } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(M - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}.$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$E_2(M)$ n'est pas nul donc 2 est valeur propre de M .

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(M)$.

Elle est libre (un seul vecteur non nul). C'est donc une base de $E_2(M)$.

d) On effectue la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{matrix}$$

Remarque

On pouvait aussi calculer $P \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que ça fait I .

$$\begin{aligned}
e) D &= P^{-1}MP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \\
\text{Donc } D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

f) Remarquons tout d'abord que $D = P^{-1}MP \iff M = PDP^{-1}$.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : « $M^k = PD^kP^{-1}$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $M^0 = PD^0P^{-1}$ », ce qui est vrai puisque $M^0 = D^0 = I$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
M^{k+1} &= M^k M \\
&= PD^k P^{-1} P D P^{-1} \quad \text{par HR} \\
&= PD^k D P^{-1} \\
&= PD^{k+1} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}, M^k = PD^kP^{-1}$.

g) Soit $k \in \mathbf{N}$.

L'égalité $M^k = a_k M + b_k I$ donne : $PD^k P^{-1} = a_k P D P^{-1} + b_k P I P^{-1}$.

C'est-à-dire, $PD^k P^{-1} = P(a_k D + b_k I)P^{-1}$.

Puis, en multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} : $D^k = a_k D + b_k I$.

Il reste alors à calculer les deux membres :

$$\begin{aligned}
D^k &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}. \\
a_k D + b_k I &= a_k \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k + b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k + b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k + b_k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\text{En identifiant : } \begin{cases} -a_k + b_k = (-1)^k \\ 2a_k + b_k = 2^k \end{cases}$$

$$\text{Ce qui mène à : } \begin{cases} a_k = \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3} \\ b_k = \frac{2(-1)^k + 2^k}{3} \end{cases}$$

2)a) On remarque tout d'abord que :

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & . & . & . & n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ n & . & . & . & n \end{pmatrix} = nJ_n.$$

Puis, on fait une récurrence.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : « $J_n^k = n^{k-1} J_n$ ».

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $J_n = n^0 J_n$ », ce qui est vrai.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} J_n^{k+1} &= J_n^k J_n \\ &= (n^{k-1} J_n) J_n \quad \text{par HR} \\ &= n^{k-1} J_n^2 \\ &= n^{k-1} (n J_n) \quad \text{d'après la remarque préliminaire} \\ &= n^k J_n. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*, J_n^k = n^{k-1} J_n$.

b) On a clairement : $M_n = J_n - I_n$.

c) Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Comme J_n et $-I_n$ commutent, la formule du binôme s'applique et donne :

$$\begin{aligned} M_n^k &= (J_n - I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} J_n^0 (-I_n)^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n \quad \text{d'après 2)a)} \\ &= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \right) J_n \quad \text{d'après 2)a)} \\ &= (-1)^k I_n + c_k J_n \\ &= c_k J_n + (-1)^k I_n. \end{aligned}$$

$$\text{avec } c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

d) On part de l'expression de c_k .

$$\begin{aligned}
 c_k &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^i n^{-1} (-1)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - \binom{k}{0} n^0 (-1)^k \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} + (-1)^{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left((n-1)^k + (-1)^{k+1} \right) \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
 &= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.
 \end{aligned}$$

e) Pour une matrice M quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, notons $[M]_{ij}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M .

Utilisons l'expression trouvée en 2)c) et distinguons deux cas :

• $i \neq j$

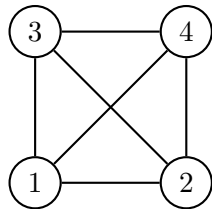
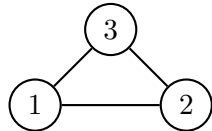
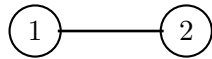
$$[M_n^k]_{ij} = c_k [J_n]_{ij} + (-1)^k [I_n]_{ij} = c_k \times 1 + (-1)^k \times 0 = c_k.$$

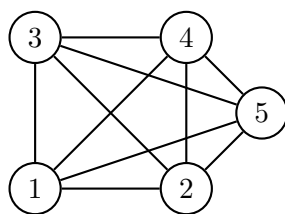
• $i = j$

$$[M_n^k]_{ii} = c_k [J_n]_{ii} + (-1)^k [I_n]_{ii} = c_k \times 1 + (-1)^k \times 1 = c_k + (-1)^k.$$

Partie II

3) Graphes K_2 , K_3 , K_4 et K_5 :





4)a) Le coefficient situé sur la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice d'adjacence de K_n correspond au nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j .

Le graphe K_n étant complet et simple, il y a :

- une et une seule arête joignant le sommet i au sommet j , lorsque $i \neq j$,
- aucune arête joignant le sommet i au sommet i .

Ainsi, la matrice d'adjacence de K_n est M_n .

b) Dans le graphe K_4 , le nombre de chaînes de longueur 4 allant du sommet 1 à lui-même est égal à :

$$\begin{aligned}
 [M_4^4]_{1,1} &= c_4 + (-1)^4 \quad \text{d'après 2)e)} \\
 &= \frac{(4-1)^4 + (-1)^5}{4} + (-1)^4 \quad \text{d'après 2)d)} \\
 &= \frac{81-1}{4} + 1 \\
 &= 21.
 \end{aligned}$$

5) Le degré d'un sommet de K_n est égale au nombre d'arêtes issues de ce sommet. Il vaut $n-1$ puisque ce sommet possède $n-1$ sommets adjacents et que K_n est complet.

6) Notons S l'ensemble des sommets de K_n .

D'après le lemme des poignées de mains, le nombre d'arêtes de K_n vaut :

$$\frac{1}{2} \sum_{s \in S} \deg(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$