
TD15 - compléments sur les variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★ ★ ☆ ☆

Soient $p \in]0, 1[$ un réel et $q = 1 - p$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$.

On note $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1)a) Préciser $S(\Omega)$, puis à l'aide de la formule des probabilités totales, montrer :

$$\forall k \in S(\Omega), P(S = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = k - i)).$$

b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(S = k) = (k + 1)p^2 q^k$.

2)a) Préciser $D(\Omega)$, puis à l'aide de la formule des probabilités totales, montrer :

$$\forall k \in D(\Omega), P(D = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = i - k)).$$

b) Montrer que $\forall k \geq 0$, $P(D = k) = p^2 \sum_{i=k}^{+\infty} q^{2i-k}$, puis que $P(D = k) = \frac{pq^k}{1+q}$.

c) Montrer que $\forall k < 0$, $P(D = k) = p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^{2i-k}$, puis que $P(D = k) = \frac{pq^{-k}}{1+q}$.

3) Montrer que $\text{cov}(S, D) = 0$. Peut-on conclure que S et D sont indépendantes ?

Exercice 2 ★ ★ ☆ ☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

On pose $S = X + Y$, $Z = 2n - S$ et $T = XYZ$. On pose aussi $q = 1 - p$.

1)a) Rappeler la loi de S . Que vaut $S(\Omega)$?

b) En déduire que Z suit une loi connue dont on précisera les paramètres.

2)a) Exprimer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$ en fonction de n et p .

2)b) Exprimer $V(X)$ et $V(Y)$, puis $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ en fonction de n et p .

3)a) Vérifier que $T = 2nXY - X^2Y - XY^2$.

b) En déduire que $E(T) = 2n^2 p^2 (1 - p)(n - 1)$.

c) A t-on $E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$?

Exercice 3 ★ ★ ☆ ☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.

On pose $M = \max(X, Y)$ et $N = \min(X, Y)$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) = P(Y \leq k) = 1 - q^k$.

2)a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(M \leq k) = (1 - q^k)^2$.

b) En déduire la loi de M .

3)a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(N \leq k) = 1 - q^{2k}$.

b) En déduire la loi de N .

Exercice 4 ★ ★ ★ ★

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(i)$.

Déterminer la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 5 ★ ★ ★ ★

Une urne contient $2n$ boules (avec $n \geq 2$). Parmi ces boules, n d'entre elles portent le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à n .

On tire de l'urne une poignée de n boules.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note U_k la variable aléatoire définie par :

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{si la poignée contient la boule numérotée } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, U_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Préciser $E(U_k)$ et $V(U_k)$.

2) Soit (i, j) un couple d'entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Montrer que $U_i U_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n-1}{4n-2}\right)$.

b) En déduire la valeur de $\text{cov}(U_i, U_j)$. Les variables aléatoires U_i et U_j sont-elles indépendantes ?

3) Soit $S = U_1 + \dots + U_n$.

a) Que représente S ?

b) Calculer $E(S)$.

c) Montrer que $V(S) = \frac{n^2}{8n-4}$.

4) Soit T la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules qui sont dans la poignée.

Exprimer T à l'aide des U_k , puis calculer $E(T)$ en fonction de n .

Exercice 6 ★ ★ ★ ★

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p .

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1) Préciser $S_n(\Omega)$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $k \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=n}^{k-1} P((X_{n+1} = k-i) \cap (S_n = i)).$$

3) Montrer par récurrence que $\forall k \in \llbracket n, +\infty \rrbracket, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$.

Exercice 7 ★ ★ ★ ★

Soit $n \geq 2$ un entier et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p .

On pose $I_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $J_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. On note aussi $q = 1 - p$.

1) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X_i > k) = q^k$.

2) a) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer $P(I_n > k)$. En déduire que I_n suit une loi connue dont on précisera le paramètre.

b) Préciser $E(I_n)$ en fonction de n et q .

3)a) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer $P(J_n \leq k)$. En déduire la loi de J_n .

b) Montrer que J_n admet une espérance et que $E(J_n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{1 - q^i}$.

Indications / Réponses

Exercice 1

1)a) $S(\Omega) = \mathbf{N}$.

b) Que vaut $P((X = i) \cap (Y = k - i))$ lorsque $i > k$?

2)a) $D(\Omega) = \mathbf{Z}$.

b) Que vaut $P((X = i) \cap (Y = i - k))$ lorsque $i < k$? Pour calculer la somme de la série, poser $j = i - k$.

c) Que vaut $P((X = i) \cap (Y = i - k))$ lorsque $i < 0$?

3) Pour voir que $\text{cov}(S, D) = 0$, on peut utiliser la bilinéarité de la covariance ou la formule de Huygens.

Non, S et D ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

1)a) Le THM 4 donne : $S \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$. On a donc $S(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

b) $Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Puis, $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $P(Z = k) = P(2n - S = k) = P(S = 2n - k) = \dots$

On conclut que $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, q)$.

2)a) $E(X) = E(Y) = np$ et $E(Z) = 2nq$.

b) $V(X) = V(Y) = np(1 - p)$ et $E(X^2) = E(Y^2) = np(1 - p) + n^2 p^2$.

c) Non.

Exercice 3

1) $P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k P(X = i) = \sum_{i=1}^k q^{i-1} p = p \sum_{j=0}^{k-1} q^j = p \times \frac{1 - q^k}{1 - q} = 1 - q^k$.

2)a) Utiliser P3.

b) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'événement $(M \leq k)$ est la réunion des événements incompatibles $(M \leq k - 1)$ et $(M = k)$.

On a donc $P(M \leq k) = P(M \leq k - 1) + P(M = k)$.

Donc $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$.

3) Même démarche qu'en 2).

Exercice 4

Le thm 5 donne : $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 5

1) $P(U_k = 1) = \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dots = \frac{1}{2}$. On déduit $E(U_k) = \frac{1}{2}$ et $V(U_k) = \frac{1}{4}$.

2)a) $P(U_i U_j = 1) = P(U_i = 1 \cap U_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dots = \frac{n-1}{4n-2}$.

b) En appliquant la formule de Huygens, on trouve $\text{cov}(U_i, U_j) = -\frac{1}{8n-4}$.
 $\text{cov}(U_i, U_j) \neq 0$ donc U_i et U_j ne sont pas indépendantes.

3)a) S représente le nombre de boules qui portent un numéro non nul.

b) $E(S) = E(U_1) + \dots + E(U_n) = \frac{n}{2}$.

c) On applique la formule hors programme donnant la variance d'une somme de variables aléatoires quelconques.

4) $T = \sum_{k=1}^n k U_k$. Par linéarité, $E(T) = \sum_{k=1}^n k E(U_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

Exercice 6

1) $S_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket$.

2) Utiliser que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, puis appliquer la formule des probabilités totales pour la s.c.e. $(S_n = i)_{i \geq n}$.

3) Pour l'hérédité, utiliser 2) et l'égalité : $\binom{i-1}{n-1} = \binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}$.

Exercice 7

$$\begin{aligned} 1) P(X_i > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_i = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{j-1} p = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+k} p = pq^k \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \\ &= pq^k \frac{1}{1-q} = q^k. \end{aligned}$$

2)a) On applique P4 :

$$P(I_n > k) = P(X_1 > k \cap \dots \cap X_n > k) = P(X_1 > k) \cdots P(X_n > k) = (q^k)^n.$$

$$\text{On déduit : } P(I_n = k) = P(I_n > k-1) - P(I_n > k) = (q^{k-1})^n - (q^k)^n$$

$$= (q^n)^{k-1} - (q^n)^k = (q^n)^{k-1} (1 - q^n).$$

Donc $I_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^n)$.

$$\text{b) } E(I_n) = \frac{1}{1 - q^n}.$$

3)a) On applique P4.

$$P(J_n \leq k) = P(X_1 \leq k \cap \dots \cap X_n \leq k) = P(X_1 \leq k) \cdots P(X_n \leq k) = (1 - q^k)^n.$$

$$\text{On déduit : } P(J_n = k) = P(J_n \leq k) - P(J_n \leq k-1) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n.$$

b) Question très technique ! Utiliser la formule du binôme et la série dérivée première.