
Concours blanc 2026 ecg2 maths appliquées

type EML

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2}$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les éléments qui vous paraissent utiles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h : x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .

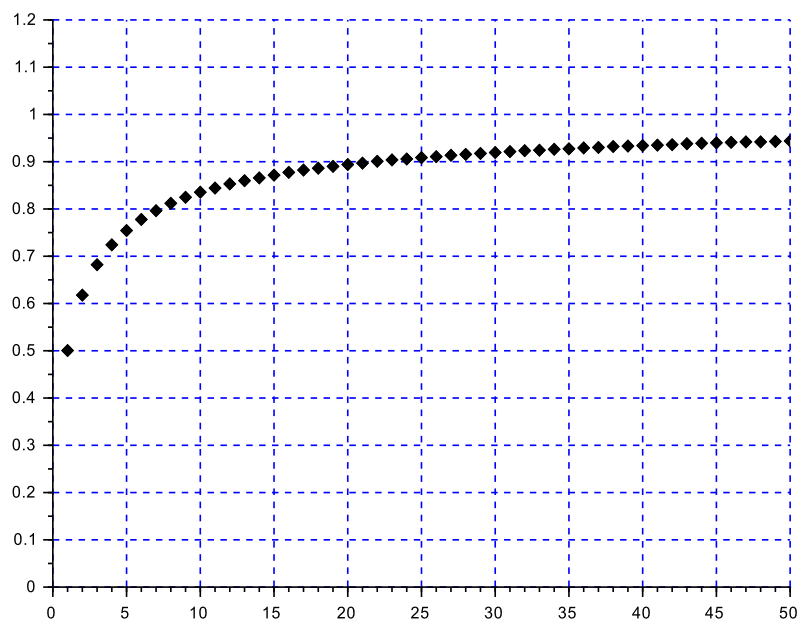
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2 .

9. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, et renvoyant une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a=0
    b=1
    while ..... :
        c=(a+b)/2
        if c**n+c-1>0:
            .....
        else:
            .....
    return .....
```

- b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par :

$$F : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

11. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$.
 b) Montrer que F admet $(u_3, (u_3)^2)$ comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.

12. a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point $(u_3, (u_3)^2)$.

b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6(u_3)^2 - 2$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0, +\infty[$?

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Question modifiée par rapport au sujet original.

Calculer A^3 . Vérifier que $A^3 = A$, puis en déduire les valeurs propres possibles de A .

2. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A .
3. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1 \quad 1 \quad 1)$, telle que $A = P D P^{-1}$.

Calculer P^{-1} .

4. Calculer la matrice $C = P^{-1} B P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note $E = \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'application $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall M \in E, f(M) = AM - MB.$$

1. Donner la dimension de E .
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1} M P$, où P est définie en **I.2**.
 - a) Montrer : $M \in \ker f \iff DN = NC$.
 - b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
 - c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4.
 - a) En déduire la dimension de $\ker f$, puis la dimension de $\text{Im} f$.
 - b) Donner un élément non nul de $\ker f$ et un élément non nul de $\text{Im} f$.

Partie III : Étude d'un système différentiel (partie rajoutée)

On considère le système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -z \\ z' = -2x - 2y - z \end{cases}$

où x, y et z sont des fonctions inconnues de la variable t .

1. Écrire (S) sous forme matricielle.
 2. Résoudre (S) .
 3. Soit (x, y, z) une solution de (S) . Vérifier que $t \mapsto e^t(x(t) + y(t) + z(t))$ est constante.
 4. Déterminer les points d'équilibre de (S) .
 5. Montrer que toute trajectoire convergente de (S) converge vers un point d'équilibre.
-

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaitre la loi de X_k .
2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction « ajout » qui prend en argument une liste L et un entier x .

```
def ajout(L,x):  
    if (x in L) == False :  
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste L .

3. Recopier et compléter la fonction Python « Simul_T » ci-dessous.
Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i . Dans le script nous notons :
 - L la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués;
 - k le rang du tirage en cours;
 - x le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd  
  
def Simul_T(N,i):  
    L = []  
    k = 0  
    while ... :  
        x = rd.randint(1,N+1)  
        ajout(L,x)  
        k = ...  
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.
Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 .
6. Soit $k \geq 2$ un entier fixé.
 - a) Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
 - b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
 - c) Montrer que $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N .

Pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1} -ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in \llbracket 2; N \rrbracket$.
 - a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.
 - b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N . Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

11.
 - a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.
 - b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

- c) Déterminer la loi de T_3 .

Espérance et covariance

12. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, montrer que $E(T_i) = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}$.

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, montrer que

$$\text{cov}(T_i, T_j) = V(T_i).$$

où $\text{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j .

Fin de l'énoncé