DS3 - 17/12/2025

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x) & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x\in\,]-\infty,1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty,1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\,\ln(t)\,dt$ converge et la calculer.

b) A l'aide d'un changement de variable, en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

6. ***a)*** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle -\ln(1-x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 2

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ I'cnsemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :
   $$f(M) = \left({}^tA\right) M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les quatre matrices :
   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

4. (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

   (c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. Questions 5)b) et 5)c) modifiées par rapport au sujet original.

   (a) Écrire la matrice F de f dans la base B.
   On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.

   (b) En déduire les valeurs propres de F.

   (c) Determiner le rang de F et le rang de $F + I$. La matrice F est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n\, \mathrm{e}^{1/u_n}.$$

1. a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   c) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

2. Recopier et compléter le programme Python ci–dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n \geqslant 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $x > 0$.

   a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.

   b) En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geqslant 1$.

   a) Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \mathrm{e}.$$

   b) En déduire que :

$$(*) \qquad \frac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}.$$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$.

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

9. a) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$.

   b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

10. a) À l'aide de l'encadrement $(*)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}}{u_k}.$$

   b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leqslant u_n - 1 \leqslant n + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

   puis

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n).$$

11. a) Justifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

   b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.