DS2 - ecg2 - maths appliquées - 12/11/2025

EXERCICE 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$

   a) Montrer : $\quad \forall S \in \mathcal{S}_2, \quad u(S) \in \mathcal{S}_2$.

   b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

   c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire : $\quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir : $\quad u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 2

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

On définit l'application ϕ de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \phi(M) = AM - MA.$$

On note Id l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ Id(M) = M$.

On note $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ avec :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note B la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$.

Partie I

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
2. a)Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.

   b)Justifier que A est diagonalisable, puis déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première ligne est formée de 1 et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

   $$A = PDP^{-1}$$

   Calculer P^{-1}.

Partie II

Cette partie a été modifiée par rapport à la version originale.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Soient M une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $N = P^{-1}MP$.

   a)Montrer que $\phi(M) = \lambda M \iff DN - ND = \lambda N$.

   b)On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $DN - ND = \lambda N \iff \begin{cases} \lambda a & = 0 \\ (\lambda+1)b & = 0 \\ (\lambda-1)c & = 0 \\ \lambda d & = 0 \end{cases} \quad (S)$

   c)Montrer que $M \in Ker(\phi - \lambda Id) \iff M = \begin{pmatrix} -2a+3b-2c+3d & a-b+c-d \\ -6a+9b-4c+6d & 3a-3b+2c-2d \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d) est solution de (S).

   d)Résoudre le système (S) d'inconnues a, b, c et d en discutant suivant les valeurs de λ.
3. On pourra utiliser les résultats des questions II.2c) et II.2d).

   a)Que vaut $Ker(\phi - \lambda Id)$ lorsque $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$?

   b)Déterminer une base de $Ker\phi$, $Ker(\phi - Id)$ et $Ker(\phi + Id)$.
4. En déduire les valeurs propres de B.
5. a)Calculer $\phi(E_1)$, $\phi(E_2)$, $\phi(E_3)$ et $\phi(E_4)$. En déduire B.

   b)Retrouver le résultat de la question II.4

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$$
$$f(0) = 1$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.
2. a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(1-x)$.

   b) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ et vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\ln(1-x) - x$.

   b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$