Correction DM6

Exercice 1

1)a)f est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0,\ f'(x) = (1+x)e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

De plus, f est continue (car dérivable) sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de bijection, f est donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f\big([0,+\infty[\big)$

$= \left[\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0,+\infty[$.

b)$1 \in [0,+\infty[$ (arrivée) admet donc un unique antécédent $\alpha \in [0,+\infty[$ (départ).

Ainsi, il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = 1$, c'est-à-dire $\alpha e^\alpha = 1$.

2)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « U_n existe et $U_n \geq 0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « U_0 existe et $U_0 \geq 0$ », c'est vrai car U_0 existe et vaut $\alpha \geq 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $U_n \geq 0$ donc $\dfrac{1}{2}U_n \geq 0$.

Mais comme f^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$, on conclut que $U_{n+1} = f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}U_n\right)$ existe.

Enfin, $U_{n+1} \geq 0$ car f^{-1} est à valeurs dans $[0,+\infty[$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par l'axiome de récurrence, on conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n$ existe et $U_n \geq 0$.

3)$U_{n+1} = f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}U_n\right) \iff f(U_{n+1}) = \dfrac{1}{2}U_n \iff U_{n+1}e^{U_{n+1}} = \dfrac{1}{2}U_n$

$\iff U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}}$.

4)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $U_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $U_0 = e^{-S_0}$ ».

Or, $e^{-S_0} = e^{-U_0} = e^{-\alpha} = \dfrac{1}{e^\alpha} = \alpha$ d'après la question 1)b) et $\alpha = U_0$.

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{-S_n}}{2^n}e^{-U_{n+1}} \text{ par hyp. de récurrence} \\ &= \frac{e^{-(S_n+U_{n+1})}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par l'axiome de récurrence, on conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

5)$\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], U_k \geq 0$ donc $S_n \geq 0$.

On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$-S_n \leq 0$, puis $e^{-S_n} \leq 1$ et $\dfrac{e^{-S_n}}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ et même $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

6)La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ puisque $\dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Elle converge puisque son paramètre est dans $]-1, 1[$.

De plus, $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ converge.

Exercice 2

1)Effectuons une intégration par parties dans $I_0 = \int_0^1 1\ln(1+x)dx$ en posant :

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = \ln(1+x)$

$f(x) = x \qquad g'(x) = \dfrac{1}{1+x}.$

f et g sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc l'IPP est licite et donne :

$\int_0^1 1\ln(1+x)dx = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}dx,$

c'est-à-dire $I_0 = \ln 2 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}dx \quad (*)$

De plus, $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right)dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2.$

En reportant dans $(*)$, on obtient : $I_0 = 2\ln 2 - 1$.

$$\begin{aligned}2)\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(1+x) - x^n\ln(1+x)\right)dx \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)dx.\end{aligned}$$

$\forall x \in [0,1],\ x^n(x-1)\ln(1+x) \leq 0$ donc $\int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)dx \leq 0$ en intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+1} - I_n \leq 0$, ce qui prouve que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

3)a)$\forall x \in [0,1],\ 1 \leq 1+x \leq 2$ donc $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2 \leq 1$.

En multipliant membre à membre par x^n (positif), on conclut que
$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n$.

b)En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx \leq \int_0^1 x^n dx$, c'est-à-dire $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.

Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}.$

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4)a)Effectuons une intégration par parties dans $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$ en posant :

$f'(x) = x^n \qquad g(x) = \ln(1+x)$

$f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \qquad g'(x) = \dfrac{1}{1+x}.$

f et g sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc l'IPP est licite et donne :

$\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x}dx,$

c'est-à-dire $\displaystyle I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$

b) $\forall x \in [0,1]\,,\ 1 \leq 1+x \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$, puis $0 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

En multipliant membre à membre par x^{n+1} (positif), on a :

$\forall x \in [0,1]\,,\ 0 \leq \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}.$

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$\displaystyle 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$, avec $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$

On conclut que $\displaystyle\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, d'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = 0.$

Par ailleurs, l'égalité de la question 4)a) donne en multipliant par n :

$\displaystyle nI_n = \frac{n\ln 2}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = 0$ donnent finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2.$$

On a donc $nI_n \underset{+\infty}{\sim} \ln 2$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n}.$