Correction DM11

Exercice

Partie I

1)Un petit calcul donne : $(A+2I)^2(A+I)=0$.

2)Soit P le polynôme défini par $P(X)=(X+2)^2(X+1)$.
D'après la question 1), $P(A)=0$ donc P est un polynôme annulateur de A.
Les racines de P sont -2 et -1. Donc $sp(A)\subset\{-2,-1\}$.

3)$\bullet E_{-2}(A)=\{X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\mid(A+2I)X=0\}$.

Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$(A+2I)X=0\iff\begin{pmatrix}2&-2&-2\\1&0&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x-2y-2z&=0\\x-2z&=0\\x-y-z&=0\end{cases}$

$\iff x=2z$ et $y=z$.

Donc $E_{-2}(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x=2z \text{ et } y=z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2z\\z\\z\end{pmatrix},z\in\mathbf{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$E_{-2}(A)\neq\{0\}$ donc -2 est valeur propre de A et le sous-espace propre de A associé à -2 est $E_{-2}(A)$.

$\bullet E_{-1}(A)=\{X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\mid(A+I)X=0\}$.

Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$(A+I)X=0\iff\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&-1&-2\\1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-2y-2z&=0\\x-y-2z&=0\\x-y-2z&=0\end{cases}$

$\iff x=2z$ et $y=0$.

Donc $E_{-1}(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x=2z \text{ et } y=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2z\\0\\z\end{pmatrix},z\in\mathbf{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

$E_{-1}(A)\neq\{0\}$ donc -1 est valeur propre de A et le sous-espace propre de A associé à -1 est $E_{-1}(A)$.

4) $E_{-2}(A)$ et $E_{-1}(A)$ sont de dimension 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut 2. Elle est inférieure à 3, taille de A.
Donc A n'est pas diagonalisable.

5)a)La question 3) donne : $f(u)=-u$ et $f(v)=-2v$.

Soit W le vecteur colonne de w dans $\mathscr{B}$. Le vecteur colonne de $f(w)$ dans $\mathscr{B}$ est $AW=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\1&-2&-2\\1&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Donc $f(w)=(0,1,1)$.

Et on remarque que $f(w)=v-2w$.

b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} 2a + 2b + c & = 0 \\ b & = 0 \\ a + b & = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{C}$ est libre.

C'est une famille libre de cardinal 3 dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

c)Grâce à la question 5)a), on obtient : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

d)On obtient : $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, $T = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.

La formule de changement de base donne alors : $A = PTP^{-1}$.

Partie II

6)$AX = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ x - 2y - 2z \\ x - y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X'$.

7)On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, où u, v et w sont des fonctions de la variable t.

a)$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff \left(P^{-1}X\right)' = T\left(P^{-1}X\right)$
$\iff Y' = TY$.

Remarque
Le fait que $\left(P^{-1}X\right)' = P^{-1}X'$ devrait être admis et rappelé au concours, cela provient du fait que P^{-1} est constante.

b)$Y' = TY \iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u' & = & -u \\ v' & = & -2v + w \\ w' & = & -2w \end{cases}$

c)Les solutions de l'équation différentielle $u' = -u$ sont $t \mapsto \beta_1 e^{-t}$, $\beta_1 \in \mathbf{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $w' = -2w$ sont $t \mapsto \beta_3 e^{-2t}$, $\beta_3 \in \mathbf{R}$.

d)Notons $\varphi : t \mapsto cte^{-2t}$.
$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) + 2\varphi(t) = c\left(1 \times e^{-2t} + t \times (-2)e^{-2t}\right) + 2cte^{-2t} = ce^{-2t}$.
Donc φ est bien solution de (E).

L'équation homogène associée à (E) est $(E_0) : v' = -2v$ dont les solutions sont $t \mapsto \beta_2 e^{-2t}$, $\beta_2 \in \mathbf{R}$.
Les solutions de (E) s'obtiennent comme la somme des solutions de (E_0) et de φ (solution particulière).
Ce sont donc les fonctions $t \mapsto \beta_2 e^{-2t} + cte^{-2t} = (\beta_2 + ct)\, e^{-2t}$, $\beta_2 \in \mathbf{R}$.

e)On a donc finalement : $u(t) = \beta_1 e^{-t}$ et $w(t) = \beta_3 e^{-2t}$.
Puis, en appliquant la question 7)d) avec $c = \beta_3$, on a : $v(t) = (\beta_2 + \beta_3 t)\, e^{-2t}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{cases} u(t) = \beta_1 e^{-t} \\ v(t) = (\beta_2 + \beta_3 t)\, e^{-2t} \\ w(t) = \beta_3 e^{-2t} \end{cases}$$

où β_1, β_2 et β_3 sont des réeels quelconques.

8)$Y = P^{-1}X$ donne $X = PY$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$\begin{cases} x(t) = 2u(t) + 2v(t) + w(t) \\ y(t) = v(t) \\ z(t) = u(t) + v(t) \end{cases}$$

Compte tenu des fonctions u, v et w trouvées en 7)e), on obtient en substituant :

$$\begin{cases} x(t) = 2\beta_1 e^{-t} + (2\beta_2 + \beta_3 + 2\beta_3 t)\, e^{-2t} \\ y(t) = (\beta_2 + \beta_3 t)\, e^{-2t} \\ z(t) = \beta_1 e^{-t} + (\beta_2 + \beta_3 t)\, e^{-2t} \end{cases}$$

où β_1, β_2 et β_3 sont des réeels quelconques.

9)$(0,0,0)$ est un point d'équilibre de (S) puisque $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-2t} = 0$ par croissances comparées.

On déduit facilement en développant les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$:

$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

Toutes les trajectoires de (S) convergent donc vers $(0,0,0)$, ce qui signifie que $(0,0,0)$ est asymptotiquement stable.

> Remarque
> La propriété du cours ne permettait pas de conclure, bien que les VP de A soient strictement négatives car A n'est pas diagonalisable.