Corrrection DM1 cubes

Exercice 1 (edhec 2018 option maths approfondies)

1)f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \geq 0, f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$.
Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
Par ailleurs, f_n est continue (car dérivable) sur $\mathbf{R}_+$.
f_n réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $f_n(\mathbf{R}_+) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x), f_n(0)\right] =]-\infty, 1]$.
$0 \in]-\infty, 1]$ admet donc un unisque antécédent u_n par f_n.
Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.

2)a)$f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$ donc $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(0)$.
Comme f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, on déduit : $0 < u_n < 1$.

2)b)$f_n(u_n) = 0$ donne : $1 - u_n - u_n^n = 0$, soit $1 - u_n = u_n^n$.
On déduit : $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$.
Or, $0 < u_n < 1$ donc $1 - u_n > 0$ et $u_n^n > 0$, d'où $f_{n+1}(u_n) > 0$.

Par construction, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. D'après ce qui précède, $f_{n+1}(u_n) > 0$.
Donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$.
Comme f_{n+1} est décroissante sur $\mathbf{R}_+$, on déduit : $u_n \leq u_{n+1}$.
Donc (u_n) est croissante.

2)c)La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc convergente vers L.
Comme $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n < 1$, on a par passage à la limite : $0 \leq L \leq 1$.

2)d)Supposons que $L \neq 1$, on a alors $0 \leq L < 1$.
(u_n) est croissante et converge vers L donc $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n \leq L$.
On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n^n \leq L^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} L^n = 0$ car $0 \leq L < 1$.
D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0 \quad (*)$

Par ailleurs, $f_n(u_n) = 0$ donne $u_n = 1 - u_n^n$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - u_n^n) = 1$, grâce à $(*)$, ce qui contredit que $L \neq 1$.

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3)a)Comme $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n < 1$ et que $v_n = 1 - u_n$, on a : $v_n > 0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - u_n) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
L'égalité $1 - u_n = u_n^n$ donne : $v_n = u_n^n$.
Donc $\ln(v_n) = \ln\left(u_n^n\right) = n\ln(u_n)$, soit $\ln(v_n) = n\ln(1 - v_n) \quad (**)$
Enfin, $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donnent : $\ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.
Puis, $n\ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

De $(**)$, on conclut que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

3)b)$1 + \dfrac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)}$

$$= \frac{\ln(v_n) - \ln(-\ln(v_n)) + \ln\left(-\dfrac{\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{\ln(v_n)}$$

$= \dfrac{\ln(v_n) - \ln(-\ln(v_n)) + \ln(-\ln(v_n)) - \ln(nv_n)}{\ln(v_n)}$

$= \dfrac{\ln(v_n) - \ln(n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)}$

$= \dfrac{-\ln(n)}{\ln(v_n)}$.

Donc $\dfrac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1 + \dfrac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)} \quad (*)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\ln(v_n)) = +\infty$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0$.

D'après 3)a), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n} = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(v_n)) = -\infty$, on a par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)} = 0$.

En reportant ces limites dans $(*)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$.

Donc $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

3)c)Comme $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$ et $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$, on déduit par transitivité que $-nv_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$, c'est-à-dire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4)$\forall n \geq 3$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$. De plus, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

D'après le critère de comparaison des séries à termes +, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Par ailleurs, la question 3)c) donne : $v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$.

Or, $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^2}{n^{1/2}} = 0$ par croissances comparées.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann de paramètre $3/2>1$).

Donc d'après le critère de négligeabilité, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$ converge.

Puis, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n^2$ converge.

Exercice 2 (edhec 2015 option maths approfondies)

1)F est une partie de $\mathbf{R}_4[X]$ par construction et elle est non vide car le polynôme nul appartient à F.

Pour tous polynômes P et Q de F, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)(0) &= \lambda P(0) + Q(0)\\ &= \lambda \times 0 + 0 \text{ car } P \in F \text{ et } Q \in F\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)(4) &= \lambda P(4) + Q(4)\\ &= \lambda \times 0 + 0 \text{ car } P \in F \text{ et } Q \in F\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda P + Q \in F$.

On conclut que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_4[X]$.

2)a)• Pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{R}_2[X]$, pour tout réel λ, on a :
$\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda(WP) + WQ = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$.
Donc ϕ est linéaire.

• $Q \in Ker\phi \iff \phi(Q) = 0 \iff WQ = 0 \iff \forall x \in \mathbf{R}, x(x-4)Q(x) = 0$
$\iff \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}, Q(x) = 0 \Longrightarrow Q = 0$ car Q a une infinité de racines.
Donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, ce qui prouve que ϕ est injective.

• $\forall Q \in \mathbf{R}_2[X], \phi(Q) \in \mathbf{R}_4[X]$ car $deg(W) = 2$ et $deg(Q) \leq 2$.
Donc $Im\phi \subset F$.

Réciproquement, soit $P \in F$. La division euclidienne de P par W donne :
$P = WQ + R$ avec $deg(R) < deg(W) = 2$.
On a alors $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = W(x)Q(x) + R(x)$.
Cette égalité pour $x = 0$ donne :
$P(0) = W(0)Q(0) + R(0)$, soit $0 = 0 \times Q(0) + R(0)$, puis $R(0) = 0$.
Cette égalité pour $x = 4$ donne de même : $R(4) = 0$.
R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines, il est donc égal au polynôme nul.
On déduit que $P = WQ = \phi(Q)$, ce qui montre que $P \in Im\phi$.
Donc $F \subset Im\phi$.
On conclut que $Im\phi = F$. Donc $\phi : \mathbf{R}_2[X] \to F$ est surjective.

• ϕ est donc une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_2[X]$ sur F, c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ sur F.

2)b)$F = Im\phi = \text{Vect}\left(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)\right) = \text{Vect}\left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\right)$.

$\left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\right)$ est donc une famille génératrice de F.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$aX(X-4) + bX^2(X-4) + cX^3(X-4) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbf{R}, ax(x-4) + bx^2(x-4) + cx^3(x-4) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbf{R}, cx^4 + (b-4c)x^3 + (a-4b)x^2 - 4ax = 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0\\ b-4c & = & 0\\ a-4b & = & 0\\ -4a & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ b &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\big(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\big)$ est libre.

C'est donc une base de F, ce qui entraîne que $dimF = 3$.

3)a)Posons $Q = aX^2 + bX + c$.
Alors, $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c$
$= 2aX + (a+b) \in \mathbf{R}_2[X]$.
Ainsi, Δ est à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.

Pour tous polynôme P et Q de $\mathbf{R}_2[X]$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda\big(P(X+1) - P(X)\big) + \big(Q(X+1) - Q(X)\big) \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q).\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.

Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

3)b)• $Q \in Ker\Delta \Longleftrightarrow \Delta(Q) = 0 \Longleftrightarrow 2aX + (a+b) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a &= 0 \\ a+b &= 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$.

Donc $Ker\Delta = \text{Vect}\,(1) = \{$ polynômes constants $\}$.

• Le théorème du rang donne : $dim\mathbf{R}_2[X] = dimKer\Delta + dimIm\Delta$, c'est-à-dire : $3 = 1 + dimIm\Delta$. Donc $dimIm\Delta = 2$.
De plus, $Im\Delta \subset \mathbf{R}_1[X]$ et $dim\mathbf{R}_1[X] = dimIm\Delta$. Donc $Im\Delta = \mathbf{R}_1[X]$.

3)c)$\Delta(1) = 0$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(1) = 0$ par linéarité de Δ.

$\Delta(X) = (X+1) - X = 1$, puis $(\Delta \circ \Delta)(X) = \Delta(1) = 0$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(X) = 0$.

$\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$, puis $(\Delta \circ \Delta)(X^2) = \Delta(2X+1) = 2\Delta(X) + \Delta(1)$ $= 2 + 0 = 2$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(X^2) = \Delta(2) = 0$.

$\Delta \circ \Delta \circ \Delta$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ qui s'annule sur une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
C'est donc nécessairement l'endomorphisme nul.