
TD0 - Systèmes linéaires

Exercice 1 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système triangulaire (S)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 4z = 4 \end{cases}$$

Exercice 2 ★ ★ ★ ★

Résoudre par Gauss le système (S)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 ★ ★ ★ ★

Résoudre par substitution le système (S)
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = -10 \end{cases}$$

Exercice 5 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -4x + 11y + 11z = 0 \\ 16x + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Exercice 7 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Exercice 8 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Exercice 9 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - 3z + t = 2 \\ x - y + z + 2t = -2 \\ x + 2y + z - t = 4 \end{cases}$$

Exercice 10 ★ ★ ★ ★

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 11 ★ ★ ★ ★

Résoudre en discutant suivant la valeur du paramètre réel λ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + (1 - \lambda)z = 0 \\ (2 - \lambda)y + \lambda z = 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Indications / Réponses

Exercice 1

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 &= 1 \\ -y - 2 &= -4 \\ z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 1)\}$.

Exercice 2

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ 2x + 13y - 7z = -1 & L_2 \\ x - y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x - y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \\ 3y - z = 3 & L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \\ 4z = 18 & L_3 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{cases}$$

Système triangulaire. On trouve $\mathcal{S} = \{(-1; 5/2; 9/2)\}$.

Exercice 3

Le système comporte « un trou » dans la deuxième équation. On peut exprimer x en fonction de z et le substituer dans la première et troisième équation.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (2z - 1) - y + z = 0 & L_1 \\ x = 2z - 1 & L_2 \\ 2(2z - 1) + y - z = 3 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 3z = 1 & L_1 \\ x = 2z - 1 & L_2 \\ y + 3z = 5 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 3z = 1 & L_1 \\ x = 2z - 1 & L_2 \\ 6z = 6 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1. \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(1; 2; 1)\}$.

Exercice 4

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 & L_1 \\ 2x - 2y + 5z = 0 & L_2 \\ 3x + 4y + 2z = -10 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 & L_1 \\ 14y - 19z = -4 & L_2 \leftarrow 2L_1 - 5L_2 \\ -14y - z = 44 & L_3 \leftarrow 3L_1 - 5L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 & L_1 \\ 14y - 19z = -4 & L_2 \\ -20z = 40 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 6 = -2 \\ 14y + 38 = -4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(2; -3; -2)\}$.

Exercice 5

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ -4x + 11y + 11z = 0 & L_2 \\ 16x + y + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ 15y + 15z = 0 & L_2 \leftarrow 4L_1 + L_2 \\ 15y + 15z = 0 & L_3 \leftarrow 16L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & L_1 \\ y = -z & L_2 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(0; -z; z), z \in \mathbf{R}\}$. Il y a une infinité de solutions.

Remarque

$(0; 0; 0)$ est solution, ce qui est normal, le système étant homogène.

Exercice 6

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & L_1 \\ 3x - 5y + z = -4 & L_2 \\ 4x - 7y + z = 5 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & L_1 \\ 7y + 7z = 35 & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ 5y + 5z = 13 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 & L_1 \\ 7y + 7z = 35 & L_2 \\ 0z = 84 & L_3 \leftarrow 5L_2 - 7L_3 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible.

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 7

On choisit de prendre x , y ou z comme paramètre et on le passe dans le membre de droite, comme si c'était une constante, ce qui permet de traiter le système comme s'il y avait 2 équations et 2 inconnues.

Prenons par exemple z comme paramètre.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y &= 1 - z & L_1 \\ x - y &= 2 + 3z & L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y &= 1 - z & L_1 \\ x &= -1 - 4z & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1 - 4z) - y &= 1 - z \\ x &= -1 - 4z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -3 - 7z \\ x &= -1 - 4z \end{cases}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-1 - 4z; -3 - 7z; z), z \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 8

$$\begin{aligned}&\begin{cases} x + y - z &= 2 & L_1 \\ 2x + 3y + 2z &= 1 & L_2 \\ x + 2y + 3z &= -1 & L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2 & L_1 \\ y + 4z &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ y + 4z &= -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2 & L_1 \\ y + 4z &= -3 & L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + (-4z - 3) - z &= 2 \\ y &= -4z - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 5z + 5 \\ y &= -4z - 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(5z + 5; -4z - 3; z), z \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 9

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 3 & L_1 \\ 2x + y - 3z + t = 2 & L_2 \\ x - y + z + 2t = -2 & L_3 \\ x + 2y + z - t = 4 & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 3 & L_1 \\ 5y + z + t = 4 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 4y - 2z - t = 5 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ y - 2z + 2t = -1 & L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 3 & L_1 \\ y - 2z + 2t = -1 & L_2 \leftrightarrow L_4 \\ 4y - 2z - t = 5 & L_3 \\ 5y + z + t = 4 & L_4 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 3 & L_1 \\ y - 2z + 2t = -1 & L_2 \\ 6z - 9t = 9 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ 11z - 9t = 9 & L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 3 & L_1 \\ y - 2z + 2t = -1 & L_2 \\ 6z - 9t = 9 & L_3 \\ 5z = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + t = 3 \\ y + 2t = -1 \\ -9t = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 1 = 3 \\ y - 2 = -1 \\ t = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ t = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(1; 1; 0; -1)\}$.

Remarques

L'opération $L_2 \leftrightarrow L_4$ permet d'avoir à l'étape suivante un pivot simple (1 en l'occurrence pour le coefficient de y) et simplifie les opérations.

L'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ bien que ne menant pas à un système triangulaire est plus simple que $L_4 \leftarrow 11L_3 - 6L_4$ possible également.

Exercice 10

On exprime z en fonction de x et y .

On obtient : $\{ z = -2x + 3y$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(x; y; -2x + 3y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$.

Exercice 11

C'est un système triangulaire.

La dernière équation donne : $z = \frac{0}{\lambda^2 - \lambda}$, mais ceci n'est valide que si $\lambda^2 - \lambda \neq 0$.

Il faut donc faire une discussion sur λ .

1)Premier cas : $\lambda^2 - \lambda = 0$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

Ceci amène à considérer deux sous-cas :

- $\lambda = 1$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ 0z = 0 \text{ (toujours vrai!)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(-z; -z; z), z \in \mathbf{R}\}$.

- $\lambda = 0$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0z = 0 \text{ (toujours vrai!)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(-z; 0; z), z \in \mathbf{R}\}$.

2)Deuxième cas : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (2 - \lambda)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation amène à distinguer deux sous-cas.

- $\lambda = 2$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = 0 \text{ (toujours vrai)} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(y; y; 0), y \in \mathbf{R}\}$.

- $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(0; 0; 0)\}$.