
Correction DS1 ecg2 - maths appliquées

Exercice 1

$$\begin{aligned} 1) a) F &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2x + y\} \\ &= \{(x, y, 2x + y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\} \\ &= \{(x, 0, 2x) + (0, y, y), (x, y) \in \mathbf{R}^2\} \\ &= \{x \cdot (1, 0, 2) + y \cdot (0, 1, 1), (x, y) \in \mathbf{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1)). \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et $((1, 0, 2), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice de F .

b) Les vecteurs $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((1, 0, 2), (0, 1, 1))$ est libre. Comme c'est une famille libre et génératrice de F , c'est donc une base de F . On conclut que $\dim F = 2$.

2) a) Les coordonnées de $u = (2, -3, 1)$ vérifient l'équation de F car $2 \times 2 - 3 - 1 = 0$. Donc $u \in F$. De même, $v = (3, 1, 7) \in F$.

En revanche, les coordonnées de $w = (1, 1, -1)$ ne vérifient pas l'équation de F puisque $2 \times 1 + 1 - (-1) \neq 0$. Donc $w \notin F$.

b) Pour tous réels a, b et c , on a :

$$\begin{aligned} a.u + b.v + c.w = 0 &\iff a \cdot (2, -3, 1) + b \cdot (3, 1, 7) + c \cdot (1, 1, -1) = (0, 0, 0) \\ &\iff (2a + 3b + c, -3a + b + c, a + 7b - c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 & L_1 \\ -3a + b + c = 0 & L_2 \\ a + 7b - c = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 & L_1 \\ 11b + 5c = 0 & L_2 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ -11b + 3c = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 & L_1 \\ 11b + 5c = 0 & L_2 \\ 8c = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc (u, v, w) est libre.

De plus, le cardinal de la famille (u, v, w) est égal à 3, tout comme la dimension de $\mathbf{R}^3$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

3) Soit $x = (1, 3, \gamma)$.

$$\begin{aligned} x &\in \text{Vect}(v, w) \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, x = \alpha.v + \beta.w \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, (1, 3, \gamma) = \alpha(3, 1, 7) + \beta(1, 1, -1) \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} 3\alpha + \beta = 1 & L_1 \\ \alpha + \beta = 3 & L_2 \\ 7\alpha - \beta = \gamma & L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} 3\alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = -2 \\ 7\alpha - \beta = \gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = -11 \end{cases}$$

Ainsi, si $x \in \text{Vect}(v, w)$, alors $\gamma = -11$.

Réciproquement, si $\gamma = -11$, on a alors $x = (1, 3, -11) = -1.v + 4.w$.

Donc $x \in \text{Vect}(v, w)$.

On conclut que $x \in \text{Vect}(v, w) \iff \gamma = -11$.

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1) F &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right\} \\ &= \left\{ \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, 0, \dots, 0, -x_1) + (0, x_2, 0, \dots, 0, -x_2) + \dots + (0, \dots, 0, x_{n-1}, -x_{n-1}), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ x_1.(1, 0, \dots, 0, -1) + x_2.(0, 1, 0, \dots, 0, -1) + \dots + x_{n-1}.(0, \dots, 0, 1, -1), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ x_1.(e_1 - e_n) + x_2.(e_2 - e_n) + \dots + x_{n-1}.(e_{n-1} - e_n), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ x_1.u_1 + x_2.u_2 + \dots + x_{n-1}.u_{n-1}, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} \right\} \\ &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

2) Pour tous réels $a_1, \dots, a_{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i (e_i - e_n) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} (a_i e_i - a_i e_n) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_n = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) e_n = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, elle est libre. L'égalité $(*)$ mène alors à :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 0.$$

Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre.

La question 1) prouve que la famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est génératrice de F .

Donc $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de F . On déduit que $\dim F = n - 1$.

3) On suppose que $n = 4$ et $w = (1, 1, 1, 1)$.

$$a) u_1 = e_1 - e_4 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 - 1e_4$$

$$u_2 = e_2 - e_4 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 - 1e_4$$

$$u_3 = e_3 - e_4 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 - 1e_4$$

$$w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 + 1e_4.$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On transforme P par les opérations de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \end{matrix}$$

La matrice de gauche est inversible car triangulaire sans zéro sur la diagonale.

Donc P est inversible.

On peut conclure que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_4 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Les coordonnées de $u = (1, 2, 3, 4)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 3, 4)$.

$$\text{Le vecteur colonne } U \text{ de } u \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne U^I de u dans la base $\mathcal{C}$ est donné par la formule de changement de base : $U = PU^I$.

On déduit : $U' = P^{-1}U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$

Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{C}$ sont donc $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$

4)a) $w = (y_1, \dots, y_n).$ Par hypothèse, $\sum_{i=1}^n y_i = 0.$ Cela signifie que $w \in F.$

Comme $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une famille génératrice de F et que $w \in F,$ on est sûr que w est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{n-1}.$

Donc la famille $\mathcal{C}$ est liée.

b) Par hypothèse, $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0.$ Cela signifie que $w \notin F.$

Montrons que $\mathcal{C}$ est libre.

Pour tous réels $a_1, \dots, a_n,$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + a_n w &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i (e_i - e_n) + a_n \sum_{i=1}^n y_i e_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_n + \sum_{i=1}^n a_n y_i e_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n y_i e_i + a_n y_n e_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + a_n y_i) e_i + \left(a_n y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) e_n &= 0 \end{aligned}$$

$(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, l'égalité précédente est équivalente à :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i + a_n y_i = 0 \text{ et } a_n y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 0.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i = -a_n y_i \text{ et } a_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n y_i = 0.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i = -a_n y_i \text{ et } a_n \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i}_{\neq 0} = 0.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i = -a_n y_i \text{ et } a_n = 0.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = 0.$$

Donc $\mathcal{C}$ est libre.

De plus, $\mathcal{C}$ est de cardinal n coïncidant avec la dimension de $\mathbf{R}^n.$ C'est donc une base de $\mathbf{R}^n.$

Exercice 3

Partie A :

1) On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$2) D = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

 D et Δ sont bien diagonales.

$$3) \text{ On vérifie que } H^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, HG = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } GH = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $H^n G = GH^n$ ». $\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $HG = GH$ », vrai d'après A3.Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} H^{n+1}G &= (HH^n)G \\ &= H(H^n G) \\ &= H(GH^n) \quad \text{par Hypothèse de récurrence} \\ &= (HG)H^n \\ &= (GH)H^n \quad \text{d'après A3} \\ &= GH^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, H^n G = GH^n$.

Partie B :

1) On peut constater d'abord quelle que soit la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, les matrices HMG et GMH le sont également par produit de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Puis, par différence, $f(M) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Donc f est « endo ».

De plus, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= H(\lambda M + N)G - G(\lambda M + N)H \\ &= (H\lambda M + HN)G - (G\lambda M + GN)H \\ &= H\lambda MG + HNG - G\lambda MH - GNH \\ &= \lambda(HMG - GMH) + (HNG - GNH) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

On conclut f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2) $f(I) = HIG - GIH = HG - GH = 0$ d'après A3

$f(H) = HHG - GHH = H^2G - GH^2 = 0$ d'après A4 avec $n = 2$

$f(H^2) = HH^2G - GH^2H = H^3G - GH^3 = 0$ d'après A4 avec $n = 3$.

Donc les matrices I , H et H^2 appartiennent à $\text{Ker } f$.

$\text{Ker } f$ étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire.

Toute matrice combinaison linéaire de I , H et H^2 est donc encore dans $\text{Ker } f$.

Cela revient à dire que $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$.

3) Pour tous réels a , b et c , on a :

$$aI + bH + cH^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 4b - 2c & 3b + 3c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & a + 2b + 4c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & 3b + 3c & a + 2b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b - 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$$

$(-2, -1, 1)$ est solution du système. Donc la famille (I, H, H^2) est liée.

En remplaçant cette solution trouvée dans $(*)$, on obtient : $-2I - H + H^2 = 0$, soit $H^2 = H + 2I$.

Donc $\text{Vect}(I, H, H^2) = \text{Vect}(I, H)$.

(I, H) est une famille génératrice de $\text{Vect}(I, H)$ et libre car I et H ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\text{Vect}(I, H)$.

Donc $\dim \text{Vect}(I, H, H^2) = \dim \text{Vect}(I, H) = 2$.

Enfin, $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$ donc $\dim \text{Ker } f \geq \dim \text{Vect}(I, H, H^2)$.

C'est-à-dire : $\dim(\text{Ker } f) \geq 2$.

Partie C :

$$1) M \in \text{Ker } f \iff f(M) = 0$$

$$\iff HMG = GMH$$

$$\iff P\Delta P^{-1}MPDP^{-1} = PDP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$

$$\iff \underbrace{P^{-1}P}_I \Delta P^{-1}MPDP^{-1} = \underbrace{P^{-1}P}_I DP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD \underbrace{P^{-1}P}_I = DP^{-1}MP\Delta \underbrace{P^{-1}P}_I$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta.$$

$$2) \text{ Soit } X \text{ une matrice quelconque de } \mathcal{M}_3(\mathbf{R}). \text{ Posons } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

$$\Delta XD = DX\Delta$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4a & 4b & 2c \\ -2d & -2e & -f \\ -2g & -2h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2b & -2c \\ 4d & -2e & -2f \\ 2g & -h & -i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4b = -2b \\ 2c = -2c \\ -2d = 4d \\ -f = -2f \\ -2g = 2g \\ -2h = -h \end{cases}$$

$$\iff b = c = d = g = h = 0$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

En renommant les lettres $a \rightarrow \alpha$, $e \rightarrow \beta$ et $i \rightarrow \gamma$, on obtient :

$$\Delta XD = DX\Delta \iff X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

$$3) M \in \text{Ker } f$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta \quad \text{grâce à C1}$$

$$\iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{en appliquant C2 avec } X = P^{-1}MP$$

$$\iff M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}f = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

4) De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker}f &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\text{Ker}f$.

De plus, pour tous réels α , β et γ , on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$$\text{Donc} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une famille libre.}$$

C'est une famille libre et génératrice de $\text{Ker}f$ donc une base de $\text{Ker}f$.

Donc $\dim \text{Ker}f = 3$.

5) Le théorème du rang donne : $\dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f = \dim \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Or, $\dim \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) = 3^2 = 9$ et $\dim \text{Ker}f = 3$ donc $\dim \text{Im}f = 6$.

Exercice 4 (extrait edhec 2007)

1) La fonction $g : x \mapsto x - \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

D'où le tableau de variations de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$		1	

Le minimum de g vaut 1. Donc $\forall x > 0, g(x) \geq 1 > 0$.

Ainsi, $\forall x > 0, x - \ln x > 0$.

2)a) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions continues.

Pour trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+}$, on écrit :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$.

D'où, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

Finalement, f est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{b) } \forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln x}{\frac{x}{\ln x} - 1} + 1}{x} = \frac{\frac{x}{x - \ln x}}{x} = \frac{1}{x - \ln x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$. Par différence, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$.

Par inverse, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d) On écrit comme pour la question 2)a) : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ par croissances comparées. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right) = +\infty$.

Par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

e) $\forall x > 0, (x - \ln x)^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

f) Courbe

