
Problème (essec II 2016)

Partie I

1)a) Soit $j \in \mathbf{N}^*$.

Comme X prend des valeurs entières, on a : $X > j - 1 \iff X > j$ ou $X = j$.

L'événement $(X > j - 1)$ est donc la réunion des événements incompatibles $(X > j)$ et $(X = j)$.

On déduit : $P(X > j - 1) = P(X > j) + P(X = j)$.

D'où $P(X = j) = P(X > j - 1) - P(X > j)$.

b) Soit $p \in \mathbf{N}^*$.

En multipliant l'égalité précédente par j et en sommant pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p jP(X = j) &= \sum_{j=1}^p (jP(X > j - 1) - jP(X > j)) \\ &= \sum_{j=1}^p (P(X > j - 1) + (j - 1)P(X > j - 1) - jP(X > j)) \\ &= \sum_{j=1}^p P(X > j - 1) + \sum_{j=1}^p \underbrace{((j - 1)P(X > j - 1))}_{u_{j-1}} - \underbrace{jP(X > j)}_{u_j}. \end{aligned}$$

En posant $k = j - 1$, on a : $\sum_{j=1}^p P(X > j - 1) = \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k)$.

Par télescopage, $\sum_{j=1}^p ((j - 1)P(X > j - 1) - jP(X > j)) = u_0 - u_p = -pP(X > p)$.

En remplaçant plus haut, on déduit :

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p).$$

2)a)i. Comme X admet une espérance, la série de terme général $kP(X = k)$ est absolument convergente donc convergente.

a)ii. La relation de Chasles donne :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) - \sum_{k=1}^p kP(X = k) \quad (*)$$

La série de terme général $kP(X = k)$ converge donc sa somme partielle converge vers la somme de cette série, ce qui se traduit par :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k).$$

En passant à la limite dans (*) quand $p \rightarrow +\infty$, on a : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0$.

a)iii. $\forall k \geq p+1, kP(X=k) \geq pP(X=k)$.

$$\text{Donc } \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) \geq \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k)$$

$$\text{Or, } \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k) = p \sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X=k) = pP\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} (X=k)\right) = pP(X > p).$$

$$\text{On déduit : } \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) \geq pP(X > p) \geq 0.$$

$$\text{On a vu que } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = 0.$$

$$\text{D'après la propriété des gendarmes, } \lim_{p \rightarrow +\infty} pP(X > p) = 0.$$

a)iv. D'après la question 1)b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = \sum_{j=1}^p jP(X=j) + pP(X > p).$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pP(X > p) = 0 \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^p jP(X=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(X=j) = E(X).$$

$$\text{Par somme, } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = E(X) = \mu.$$

C'est une valeur finie donc la série de terme général $P(X > j)$ converge.

a)v. La somme partielle d'ordre $p-1$ de la série de terme général $P(X > j)$ tend vers μ quand $p \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ainsi, } \mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

$$\text{b)i. } \forall p \in \mathbf{N}^*, v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^p P(X > j) - \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = P(X > p) \geq 0.$$

Donc la suite $(v_p)_{p \geq 1}$ est croissante.

b)ii. D'après la question 1)b), on a pour tout $p \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^p jP(X=j) = v_p - \underbrace{pP(X > p)}_{\geq 0} \leq v_p \quad (1)$$

Par hypothèse, la série $\sum_{j \geq 0} P(X > j)$ converge.

La somme partielle v_p de cette série tend donc vers $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$.

$$\text{Cette suite } (v_p)_{p \geq 1} \text{ étant croissante, on a : } v_p \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j) \quad (2)$$

En recollant (1) et (2), on déduit : $\sum_{j=1}^p jP(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$.

b)iii. La pour somme partielle S_p d'ordre p de la série $\sum_{j \geq 1} |jP(X=j)|$ est :

$$S_p = \sum_{j=1}^p |jP(X=j)| = \sum_{j=1}^p jP(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

$(S_p)_{p \geq 1}$ est croissante car $S_{p+1} - S_p = (p+1)P(X=p+1) \geq 0$,

et majorée par $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$. Elle est donc convergente.

Ainsi, la série $\sum_{j \geq 1} jP(X=j)$ converge absolument. Donc X admet une espérance.

c)La question 2)a) montre que si X admet une espérance, alors la série $\sum_{j \geq 0} P(X > j)$ converge.

Réciproquement, la question 2)b) montre que si la série $\sum_{j \geq 0} P(X > j)$ converge, alors X admet une espérance.

D'où l'équivalence.

3)a)D'après la question 1)a), on a pour tout $j \in \mathbf{N}^*$:

$$P(X=j) = P(X > j-1) - P(X > j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc (*) définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$.

b)D'après 2)c), $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{j \geq 0} P(X > j)$ converge.

Or, $j+1 \underset{+\infty}{\sim} j$ donc $(j+1)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} j^\alpha$. Par inverse, $P(X > j) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{j^\alpha}$.

Les séries $\sum_{j \geq 0} P(X > j)$ et $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^\alpha}$ ont donc même nature.

Or, $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann de paramètre α , convergeant ssi $\alpha > 1$.

Donc X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

c) Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} \right) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{j+1}{j}\right)^\alpha} \right).$$

$$\text{D'où, } \forall j \in \mathbf{N}^*, P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \right).$$

$$\text{d)i. } \forall x \in [0, 1], f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \underbrace{\alpha}_{>0} \left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1 \right).$$

$1+x \geq 1$ donc $(1+x)^{\alpha+1} \geq 1$, puis $\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} \leq 1$.

Donc $\forall x \in [0, 1], f'(x) \leq 0$, ce qui prouve que f est décroissante sur $[0, 1]$.

d)ii. f est décroissante sur $[0, 1]$ et vérifie $f(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq 0$.

On a donc $\forall x \in [0, 1], 1 - (1+x)^{-\alpha} \leq \alpha x$.

En remplaçant x par $\frac{1}{j} \in [0, 1]$ où $j \in \mathbf{N}^*$, on obtient :

$$1 - \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}, \text{ c'est-à-dire : } 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}.$$

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{j^\alpha}$ et en utilisant 3)c), on déduit :

$$\forall j \in \mathbf{N}^*, P(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

e) La question 3)c) donne en multipliant membre à membre par $j^{\alpha+1}$:

$$j^{\alpha+1}P(X = j) = j \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \right) = -j \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1 \right).$$

D'après le cours, on a : $(1+x)^{-\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} -\alpha x$.

Comme $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} = 0$, on peut remplacer x par $\frac{1}{j}$, ce qui donne :

$$\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\alpha \times \frac{1}{j}. \text{ Puis, en multipliant par } -j, \text{ on a :}$$

$$-j \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1 \right) \underset{+\infty}{\sim} -\alpha. \text{ Donc } \lim_{j \rightarrow +\infty} j^{\alpha+1}P(X = j) = \alpha.$$

f) La question 3)e) donne : $P(X = j) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$, puis $j^2P(X = j) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$.

On a les équivalences suivantes :

X admet une variance $\iff X^2$ admet une espérance (Koenig)

$$\iff \sum_{j \geq 1} j^2 P(X = j) \text{ converge}$$

$$\iff \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}} \text{ converge (critère d'équivalence)}$$

$$\iff \alpha - 1 > 1 \quad (\text{série de Riemann})$$

$$\iff \alpha > 2.$$

Partie II

4) Remarque importante

L'égalité $A_n = \bigcup_{k \geq 1} (T_k = n)$ ne figurait pas dans le sujet, je l'ai rajoutée pour aider

à la compréhension.

On peut remarquer que comme $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, X_i \geq 1$, on a $T_k \geq k$, ce qui impose que dans la réunion définissant A_n , l'entier k ne peut pas dépasser n .

On a donc $A_n = \bigcup_{k=1}^n (T_k = n) \quad (**)$

a) Les événements A_1 et $(X_1 = 1)$ sont égaux, ce qu'on peut voir de 2 façons :

intuitive

$A_1 = \ll \text{le composant en place le jour 1 tombe en panne} \gg$.

$(X_1 = 1) = \ll \text{le premier composant a une durée de vie de 1 jour} \gg$.

Les événements A_1 et $(X_1 = 1)$ sont égaux, puisque le premier composant est forcément le composant en place le jour 1.

mathématique

Grâce à $(**)$, on a : $A_1 = \bigcup_{k=1}^1 (T_k = 1) = (T_1 = 1) = (X_1 = 1)$.

On déduit : $P(A_1) = P(X_1 = 1)$, c'est-à-dire : $u_1 = p_1$.

b)i. De nouveau, on peut résoudre cette question de deux façons :

intuitive

L'événement $(X_1 = 2) \cup ((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$ est réalisé si et seulement si :

– le premier composant vit 2 jours,

ou bien

– les premier et deuxième composants vivent 1 jour chacun.

Ces 2 possibilités sont les seules qui mènent à une panne de composant le 2ème jour, c'est-à-dire à la réalisation de A_2 .

Ainsi, $A_2 = (X_1 = 2) \cup ((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$.

mathématique

Grâce à $(**)$, on a :

$$\begin{aligned} A_2 &= \bigcup_{k=1}^2 (T_k = 2) = (T_1 = 2) \cup (T_2 = 2) = (X_1 = 2) \cup (X_1 + X_2 = 2) \\ &= (X_1 = 2) \cup ((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ prennent leurs valeurs dans } \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

b)ii. Les événements $(X_1 = 2)$ et $((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$ sont incompatibles.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(A_2) &= P(X_1 = 2) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \text{ par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)^2 \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

Compte tenu des notations, on a finalement :

$$u_2 = p_2 + p_1^2.$$

c)i. • Comme $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\tilde{X}_i = X_{i+1}$, la famille $(\tilde{X}_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est la famille $(X_i)_{i \geq 2}$ dont les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes par hypothèse.

Ainsi, les variables aléatoires $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes.

• Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Les variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendantes. $i + 1 \geq 2$ donc $X_{i+1} = \tilde{X}_i$ et X_1 sont indépendantes.

De plus, $X_{i+1} = \tilde{X}_i$ et X_1 ont même loi par hypothèse.

c)ii. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
A_n \cap (X_1 = k) &= \left(\bigcup_{j \geq 1} (T_j = n) \right) \cap (X_1 = k) \\
&= \underbrace{((T_1 = n) \cap (X_1 = k))}_{= \emptyset \text{ car } T_1 = X_1 \text{ et } k < n} \cup \left(\bigcup_{j \geq 2} (T_j = n) \right) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{j \geq 2} (T_j = n) \cap (X_1 = k) \quad \text{par distributivité} \\
&= \bigcup_{j \geq 2} (X_1 + X_2 + \dots + X_j = n) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{j \geq 2} (k + X_2 + \dots + X_j = n) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{j \geq 2} (X_2 + \dots + X_j = n - k) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{j \geq 2} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_{j-1} = n - k) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{i \geq 1} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_i = n - k) \cap (X_1 = k) \quad \text{en posant } i = j - 1 \\
&= \bigcup_{j \geq 1} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k) \cap (X_1 = k) \quad \text{en renommant } i \text{ en } j \\
&= (X_1 = k) \cap \bigcup_{j \geq 1} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k).
\end{aligned}$$

c)iii. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
&P((X_1 = k) \cap A_n) \\
&= P\left((X_1 = k) \cap \bigcup_{j \geq 1} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k)\right) \quad \text{d'après 4)c)ii.} \\
&= P\left(\bigcup_{j \geq 1} ((X_1 = k) \cap (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k))\right) \quad \text{par distributivité} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k)) \quad \text{par incompatibilité} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 + \dots + X_{j+1} = n - k)).
\end{aligned}$$

Comme $X_1, X_2, \dots, X_{j+1}$ sont mutuellement indépendantes, X_1 est indépendante de toute fonction de $X_2, \dots, X_{j+1}$ donc indépendante avec $X_2 + \dots + X_{j+1}$, grâce au lemme des coalitions. On poursuit le calcul ...

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 + \dots + X_{j+1} = n - k) \\ &= P(X_1 = k) \sum_{j=1}^{+\infty} P(X_2 + \dots + X_{j+1} = n - k). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{j+1}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi donc $X_2 + \dots + X_{j+1}$ a même loi que $X_1 + \dots + X_j = T_j$ **(1)**

$$\begin{aligned} &= P(X_1 = k) \sum_{j=1}^{+\infty} P(T_j = n - k). \\ &= P(X_1 = k) P\left(\bigcup_{j \geq 1} (T_j = n - k)\right) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(X_1 = k) P(A_{n-k}). \end{aligned}$$

On vient de prouver que $P((X_1 = k) \cap A_n) = P(X_1 = k) P(A_{n-k})$, ce qui établit :

$$P_{(X_1=k)}(A_n) = P(A_{n-k}).$$

Remarques

1) Intuitivement, ce résultat bien ardu à prouver mathématiquement est évident. En effet, si l'événement $(X_1 = k)$ se réalise, cela signifie que le premier composant tombe en panne le jour k . Pour réaliser A_n , il faut une panne de composant au jour n . En réinitialisant les jours, on est dans la situation où il reste $n - k$ jours où l'on veut une panne au jour $n - k$ donc une réalisation de A_{n-k} .

2) Un mot de l'égalité **(1)** qui me paraît hors programme ! Expliquons pour $j = 2$. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indép. et de même loi.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = s - k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = s - k) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_3 = k) P(X_2 = s - k) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_3 \text{ ont même loi} \\ &= P(X_2 + X_3 = s). \end{aligned}$$

Donc $X_1 + X_2$ et $X_2 + X_3$ ont même loi.

d) La formule des probabilités totales pour le sce $((X_1 = k))_{k \geq 1}$ donne :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(A_n) P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{n-k}) P(X_1 = k) \quad \text{d'après 4)c)iii.} \end{aligned}$$

Dans la somme, on doit avoir $n - k \geq 0$, c'est-à-dire $k \leq n$.

$$\text{Donc } P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_{n-k}) P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^n u_{n-k} p_k.$$

Ainsi, $u_n = u_{n-1}p_1 + \cdots + u_0p_n$.

e) Programme

```
def suite(n,P):
    U=[1]
    for j in range(1,n+1):
        s=0
        for k in range(1,j+1):
            s=s+U[j-k]*P[k-1]
        U.append(s)
    return U[n]
```

5)a) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_1 > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_1 = j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^{i+k} \quad \text{en posant } i = j - k - 1 \text{ ou } j = i + k + 1 \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^i (1-\lambda)^k \\ &= \lambda(1-\lambda)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^i \\ &= \lambda(1-\lambda)^k \times \frac{1}{1-(1-\lambda)} \\ &= (1-\lambda)^k. \end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P_{(X_1 > k)}(X_1 = k+1) &= \frac{P((X_1 > k) \cap (X_1 = k+1))}{P(X_1 > k)} \\ &= \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)} \quad \text{car } (X_1 = k+1) \subset (X_1 > k) \\ &= \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \lambda$ ».

Montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $u_1 = \lambda$ ». C'est vrai car $u_1 = p_1 = P(X_1 = 1) = \lambda(1-\lambda)^{1-1} = \lambda$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} u_{n+1-k} p_k \quad \text{en utilisant 4)d) avec } n \rightarrow n+1 \\
&= u_0 p_{n+1} + \sum_{k=1}^n u_{n+1-k} p_k \quad \text{en isolant le dernier terme} \\
&= 1 \times \lambda(1-\lambda)^n + \sum_{k=1}^n \lambda \times \lambda(1-\lambda)^{k-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \sum_{k=1}^n (1-\lambda)^{k-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n-1} (1-\lambda)^i \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \times \frac{1 - (1-\lambda)^n}{1 - (1-\lambda)} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda(1 - (1-\lambda)^n) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(A_n) = \lambda$.

$$6)a)(X_1 = i)_{i \geq 1} \text{ est un sce donc } \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) = 1, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1.$$

Comme $p_1 + p_2 = 1$, cela entraîne que $\sum_{i=3}^{+\infty} p_i = 0$.

Enfin, comme $p_i \geq 0$, on a finalement $\forall i \geq 3, p_i = 0$.

b) Comme $\forall i \geq 3, p_i = 0$, l'égalité 4)d) donne pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2}.$$

$$\text{On a alors : } \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} \\ u_{n-1} + 0u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 2, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$

c)i. λ est valeur propre de M

$$\iff M - \lambda I \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (p-\lambda) \times (-\lambda) - (1-p) \times 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - p\lambda + p - 1 = 0 \quad (E)$$

$\lambda_1 = 1$ est solution de (E) . L'autre solution λ_2 est donnée par $\lambda_1 \lambda_2 = p - 1$.

Donc $\lambda_2 = p - 1$.

M possède deux valeurs propres distinctes : 1 et $p - 1 < 0$.

Elle est donc diagonalisable.

Il reste à déterminer les sous-espaces propres de M . Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$U \in E_1(M) \iff (M - I)U = 0 \iff \begin{cases} (p-1)x + (1-p)y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff y = x$$

(en divisant la première équation par $p-1 \neq 0$).

$$\text{On déduit } E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$U \in E_{p-1}(M) \iff (M - (p-1)I)U = 0 \iff x + (1-p)y = 0 \iff x = (p-1)y$$

$$\text{On déduit } E_{1-p}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En posant } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a alors : } M = PDP^{-1}.$$

c)ii. Une récurrence classique donne : $\forall n \in \mathbf{N}^*, M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$

$$\text{avec } D^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remplace et on obtient :

$$\begin{aligned} M^{n-1} &= \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 - (p-1)^n & 1-p + (p-1)^n \\ 1 - (p-1)^{n-1} & 1-p + (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque

Une récurrence était possible.

$$\text{d)i. Une récurrence facile donne : } \forall n \in \mathbf{N}^*, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1)^2 \\ 1-p \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 - (p-1)^{n+1} \\ 1 - (p-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On déduit : } u_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p}.$$

d)ii. Comme $0 < p < 1$, on a : $-1 < p-1 < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p-1)^{n+1} = 0$,

$$\text{puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2-p}.$$

Partie III

$$\begin{aligned}
 7) E(T_k) &= E(X_1 + \dots + X_k) \\
 &= E(X_1) + \dots + E(X_k) \quad \text{par linéarité} \\
 &= \mu + \dots + \mu \quad \text{car les } X_i \text{ ont la même loi} \\
 &= k\mu.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8)a) V(T_k) &= V(X_1 + \dots + X_k) \\
 &= V(X_1) + \dots + V(X_k) \quad \text{par indépendance des } X_i \\
 &= \sigma^2 + \dots + \sigma^2 \quad \text{car les } X_i \text{ ont la même loi} \\
 &= k\sigma^2.
 \end{aligned}$$

b) Bienaymé-Tchébychev pour une v.a X possédant une variance s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

On l'applique avec $X \rightarrow T_k$ et $\epsilon \rightarrow k\epsilon$, ce qui donne pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(|T_k - E(T_k)| \geq k\epsilon) \leq \frac{V(T_k)}{(k\epsilon)^2} \text{ avec } E(T_k) = k\mu \text{ et } V(T_k) = k\sigma^2.$$

$$\text{Donc } \forall \epsilon > 0, P(|T_k - k\mu| \geq k\epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}.$$

c) De l'inégalité précédente, on déduit pour tout $\epsilon > 0$:

$$-P(|T_k - k\mu| \geq k\epsilon) \geq -\frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}, \text{ puis } 1 - P(|T_k - k\mu| \geq k\epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}.$$

En passant à l'événement contraire, on obtient :

$$P(|T_k - k\mu| < k\epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}.$$

$$\text{Or, } |T_k - k\mu| < k\epsilon \iff -k\epsilon < T_k - k\mu < k\epsilon \iff -\epsilon < \frac{T_k}{k} - \mu < \epsilon$$

$$\iff \mu - \epsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \epsilon \iff \frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[.$$

$$\text{On déduit : } P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}.$$

Et comme une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1, on a finalement :

$$1 - \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2} \leq P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) < k\epsilon \leq 1.$$

$$\text{Enfin, } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}\right) = 1.$$

$$\text{D'après la propriété des gendarmes, } \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) = 1.$$

9)a) Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

$$- \text{ si } X_i(\omega) \leq m, \text{ alors on a : } Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) \text{ et } Z_i^{(m)}(\omega) = 0.$$

$$\text{Donc } Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) + 0 = X_i(\omega).$$

$$- \text{ si } X_i(\omega) > m, \text{ alors on a : } Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \text{ et } Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega).$$

$$\text{Donc } Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = 0 + X_i(\omega) = X_i(\omega).$$

$$\text{Ainsi, } \forall \omega \in \Omega, X_i(\omega) = Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega). \text{ Donc } X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}.$$

b)i. A priori, la question n'impose pas de prouver que $Z_1^{(m)}$ admet une espérance. On va le faire quand même en montrant la convergence absolue de la série de terme général $iP(Z_1^{(m)} = i)$. Ce terme général étant positif, cela revient à montrer la convergence simple.

Les probabilités totales pour le sce $((X_1 > m), (X_1 \leq m))$ donne pour $i \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} & P(Z_1^{(m)} = i) \\ &= P_{(X_1 > m)}(Z_1^{(m)} = i)P(X_1 > m) + \underbrace{P_{(X_1 \leq m)}(Z_1^{(m)} = i)}_{0 \text{ car si } X_1 \leq m, \text{ alors } Z_1^{(m)} = 0} P(X_1 \leq m) \\ &= P_{(X_1 > m)}(X_1 = i)P(X_1 > m) \quad \text{car si } X_1 > m, \text{ alors } Z_1^{(m)} = X_1. \\ &= P((X_1 > m) \cap (X_1 = i)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq m \\ P(X_1 = i) & \text{si } i \geq m+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme X_1 admet une espérance, alors la série $\sum_{i \geq m+1} iP(X_1 = i)$ converge.

Donc la série $\sum_{i \geq 1} iP(Z_1^{(m)} = i)$ converge. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance donnée par :

$$E(Z_1^{(m)}) = \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Z_1^{(m)} = i) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i).$$

D'après la question 3)d)ii, on a : $P(X_1 = i) \leq \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}}$, puis $iP(X_1 = i) \leq \frac{\alpha}{i^\alpha}$.

La série de terme général $\frac{\alpha}{i^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$.

On peut donc sommer les inégalités pour i allant de $m+1$ à $+\infty$ et conclure :

$$E(Z_1^{(m)}) \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}.$$

b)ii. Soit i un entier supérieur ou égal à $m+1$.

Pour tout $x \in [i-1, i]$, on a : $x^\alpha \leq i^\alpha$, puis $\frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ et $\frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \frac{\alpha}{x^\alpha}$.

En intégrant entre les bornes croissantes $i-1$ et i , on a :

$$\int_{i-1}^i \frac{\alpha}{i^\alpha} dx \leq \int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$

Comme $\frac{\alpha}{i^\alpha}$ ne dépend pas de x , on a : $\int_{i-1}^i \frac{\alpha}{i^\alpha} dx = \frac{\alpha}{i^\alpha} (i - (i-1)) = \frac{\alpha}{i^\alpha}$.

Donc $\forall i \geq m+1$, $\frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$.

En sommant ces inégalités pour $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$ (avec $n \geq m+1$), on a :

$$\sum_{i=m+1}^n \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \sum_{i=m+1}^n \int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$

Donc $\sum_{i=m+1}^n \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \int_m^{n+1} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$ (2) par la relation de Chasles.

La série de Riemann $\sum_{i \geq m+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}$ et l'intégrale de Riemann $\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$ convergent car $\alpha > 1$.

Par passage à la limite dans (2), on a : $\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$.

En recollant avec l'inégalité de la question 9)b)i. on conclut :

$$E\left(Z_1^{(m)}\right) \leq \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$

b)iii. Pour tout $A > m$, on a :

$$\int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \int_m^A \alpha x^{-\alpha} dx = \left[\alpha \times \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_m^A = \frac{\alpha}{-\alpha+1} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right).$$

$\alpha - 1 > 0$ car $\alpha > 1$. Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = 0$.

On déduit : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$.

Ainsi, $\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$.

b)iv. La variable aléatoire $Z_1^{(m)}$ est positive donc son espérance est positive.

Des questions b)ii. et b)iii., on déduit alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, 0 \leq E\left(Z_1^{(m)}\right) \leq \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}} = 0.$$

La propriété des gendarmes donne : $\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left(Z_1^{(m)}\right) = 0$.

b)v. La question 9)a) donne : $Y_i^{(m)} = X_i - Z_i^{(m)}$.

Comme X_i et $Z_i^{(m)}$ admettent une espérance, alors $Y_i^{(m)}$ admet une espérance donnée par linéarité :

$$E(Y_i^{(m)}) = E(X_i) - E(Z_i^{(m)}) = \mu - E(Z_i^{(m)}).$$

Or, $\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left(Z_1^{(m)}\right) = 0$ donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left(Y_1^{(m)}\right) = \mu$.

c)i. Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas.

– si $X_1(\omega) \leq m$, alors $Y_1^{(m)}(\omega) = X_1(\omega)$.

On a alors : $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 = X_1(\omega)^2 = X_1(\omega) \times X_1(\omega) \leq mX_1(\omega)$.

– si $X_1(\omega) > m$, alors $Y_1^{(m)}(\omega) = 0$.

On a alors : $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 = 0 \leq mX_1(\omega)$.

Ainsi, $\forall \omega \in \Omega$, $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 \leq mX_1(\omega)$. Donc $\left(Y_1^{(m)}\right)^2 \leq mX_1$.

c)ii. $Y_1^{(m)}$ est discrète finie puisque $Y_1^{(m)}(\Omega) \subset \llbracket 1, m \rrbracket$. Elle admet donc une variance et un moment d'ordre 2.

Par croissance de l'espérance, on déduit de la question 9)c)i. :

$$E\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \leq E(mX_1) = mE(X_1) = m\mu \quad (3)$$

Enfin, la formule de Koenig donne :

$$V\left(Y_1^{(m)}\right) = \left(E\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) - E\left(Y_1^{(m)}\right)^2 \leq E\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \quad (4)$$

En recollant (3) et (4), on conclut : $V\left(Y_1^{(m)}\right) \leq m\mu$.

$$d) \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} = 0.$$

D'après la définition de la limite :

$$\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq m_0, \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leq \epsilon.$$

e) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$T_k = \sum_{i=1}^k X_i = \sum_{i=1}^k \left(Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}\right) = \sum_{i=1}^k Y_1^{(m)} + \sum_{i=1}^k Z_1^{(m)} = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}.$$

$$f)i. \text{ Par linéarité, on a : } E(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^k E(Z_i^{(m)}).$$

Les calculs faits dans la question 9)b)iv. donnent : $E(Z_1^{(m)}) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$,
mais également $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, E(Z_i^{(m)}) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \quad (5)$

En effet, les variables aléatoires $Z_i^{(m)}$ ont la même loi que $Z_1(m)$, puisque les variables aléatoires X_i ont même loi que X_1 .

En sommant les inégalités (5) pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a :

$$\sum_{i=1}^k E(Z_i^{(m)}) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$E(V_k^{(m)}) \leq k \times \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \quad (6).$$

f)ii) D'après l'inégalité de Markov, pour toute variable aléatoire positive admettant une espérance, on a :

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

En l'appliquant avec $X \rightarrow V_k^{(m)}$ et $a \rightarrow k\epsilon$, on a : $P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \frac{E(V_k^{(m)})}{k\epsilon}$.

En recollant avec (6), on conclut :

$$P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}.$$

$$\text{g)i. } E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)}) = k\mu - E(V_k^{(m)}).$$

$$\text{Or, } E(V_k^{(m)}) \leq k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

$$\text{On déduit : } E(U_k^{(m)}) \geq k\mu - k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

$$\text{g)ii. Comme } V_k^{(m)} \text{ est positive, alors } E(V_k^{(m)}) \geq 0.$$

$$\text{On a alors : } E(U_k^{(m)}) \leq k\mu \text{ (voir question g)i.)}$$

En recollant avec l'inégalité g)i., on déduit :

$$k\mu - k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq E(U_k^{(m)}) \leq k\mu.$$

Par hypothèse prise par l'énoncé, on a : $\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq \epsilon$ et on déduit :

$$k\mu - k\epsilon \leq E(U_k^{(m)}) \leq k\mu, \text{ ou encore : } -k\epsilon \leq E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq 0.$$

$$\text{Donc } |E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq k\epsilon.$$

g)iii. Montrons que l'événement $(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\epsilon)$ est contenu dans l'événement $(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\epsilon)$.

Pour y voir plus clair, on peut se débarrasser de la valeur absolue.

$$|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\epsilon \iff \begin{cases} U_k^{(m)} - k\mu \geq 2k\epsilon & (7) \\ \text{ou} \\ U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\epsilon & (8) \end{cases}$$

$$(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\epsilon) \iff \begin{cases} U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) \geq k\epsilon & (9) \\ \text{ou} \\ U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) \leq -k\epsilon & (10) \end{cases}$$

La question g)ii) donne : $k\mu + k\epsilon \geq E(U_k^{(m)})$ (11) et $k\mu - k\epsilon \leq E(U_k^{(m)})$ (12).

• Si (7) est réalisée, alors (7)+(11) donne : $U_k^{(m)} + k\epsilon \geq E(U_k^{(m)}) + 2k\epsilon$, soit $U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) \geq k\epsilon$, ce qui réalise (9).

• Si (8) est réalisée, alors (8)+(12) donne : $U_k^{(m)} - k\epsilon \leq E(U_k^{(m)}) - 2k\epsilon$, soit $U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) \leq -k\epsilon$, ce qui réalise (10).

On a donc bien montré que $(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\epsilon) \subset (|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\epsilon)$.

Par croissance de la probabilité, on conclut :

$$P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\epsilon) \leq P(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\epsilon).$$

g)iv. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ étant mutuellement indépendantes et de même loi, il en est de même intuitivement pour les variables aléatoires $Y_1^{(m)}, \dots, Y_k^{(m)}$ puisque $Y_i^{(m)}$ ne dépend que de X_i .

$$\begin{aligned}
V(U_k^{(m)}) &= V\left(\sum_{i=1}^k Y_i^{(m)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^k V(Y_i^{(m)}) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{i=1}^k V(Y_1^{(m)}) \quad \text{car les } Y_1^{(m)} \text{ ont la même loi}
\end{aligned}$$

La question 9)c)ii) donne : $V(Y_1^{(m)}) \leq m\mu$.

En sommant les inégalités, on conclut :

$$V(U_k^{(m)}) \leq km\mu.$$

g)v.L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à $U_k^{(m)}$ donne :

$$P\left(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geq k\epsilon\right) \leq \frac{V(U_k^{(m)})}{(k\epsilon)^2}.$$

Comme $V(U_k^{(m)}) \leq km\mu$, on déduit : $P\left(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geq k\epsilon\right) \leq \frac{km\mu}{(k\epsilon)^2}$,

c'est-à-dire : $P\left(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geq k\epsilon\right) \leq \frac{m\mu}{k\epsilon^2}$.

En recollant avec l'inégalité g)iii., on conclut :

$$P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right) \leq \frac{m\mu}{k\epsilon^2}.$$

h)i.La formule du crible donne pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Comme $P(A \cup B) \leq 1$, on déduit : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.

D'où $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

h)ii. Posons $A = (V_k^{(m)} < k\epsilon)$ et $B = (U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[)$.

Supposons que $A \cap B$ est réalisé. On a alors :

$$0 \leq V_k^{(m)} < k\epsilon \text{ et } k(\mu - 2\epsilon) < U_k^{(m)} < k(\mu + 2\epsilon).$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, on a :

$$k(\mu - 2\epsilon) < T_k < k(\mu + 3\epsilon) \text{ et comme } k(\mu - 3\epsilon) < k(\mu - 2\epsilon), \text{ on déduit :}$$

$$T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[.$$

$$\text{Ainsi, } A \cap B \subset (T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[).$$

$$\text{Par croissance de la probabilité : } P(A \cap B) \leq P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[).$$

En recollant avec l'inégalité h)i., on déduit :

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[) \geq P(A) + P(B) - 1, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[) \geq P(V_k^{(m)} < k\epsilon) + P(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[) - 1.$$

h)iii. Les événements $(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[)$ et $(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon)$ sont contraires.

Donc $P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right) = 1 - P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right)$.

Or, la question g)v. donne : $P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right) \leq \frac{m\mu}{k\epsilon^2}$.

On déduit : $P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right) \geq 1 - \frac{m\mu}{k\epsilon^2}$ (13)

De plus, $P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) = 1 - P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right)$ et $P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}$.

Donc $P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}$ (14)

En ajoutant (13) et (14), on a :

$$P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) + P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right) \geq 2 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \frac{m\mu}{k\epsilon^2}$$

Ce qui donne enfin :

$$P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) + P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right) - 1 \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \frac{m\mu}{k\epsilon^2}.$$

En recollant avec h)ii., on conclut :

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \frac{m\mu}{k\epsilon^2}.$$

h)iv. L'inégalité précédente est valable pour tout entier $m \geq m_0$.

Prenons $k \geq m_0^2$, on a alors $\sqrt{k} \geq m_0$.

Pour tout $k \geq m_0^2$, choisissons donc un entier $m \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$. Cet entier m est tel que $m \geq m_0$ et il dépend de k , notons-le m_k .

De l'encadrement $\sqrt{k} \leq m_k \leq 2\sqrt{k}$, on déduit en multipliant par $\frac{\mu}{k\epsilon^2}$:

$$\frac{\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} \leq \frac{m_k\mu}{k\epsilon^2} \leq \frac{2\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2}.$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} = 0. \text{ D'après les gendarmes, } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k\mu}{k\epsilon^2} = 0 \quad (15)$$

De l'encadrement $\sqrt{k} \leq m_k \leq 2\sqrt{k}$, on déduit par décroissance de $x \mapsto x^{1-\alpha}$:

$$\left(\sqrt{k}\right)^{1-\alpha} \geq m_k^{1-\alpha} \geq 2\left(\sqrt{k}\right)^{1-\alpha}, \text{ soit } \frac{1}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} \geq m_k^{1-\alpha} \geq \frac{2}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}}.$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0 \text{ car } \frac{\alpha-1}{2} > 0.$$

$$\text{D'après les gendarmes, } \lim_{k \rightarrow +\infty} m_k^{1-\alpha} = 0 \quad (16)$$

De (15) et (16), on déduit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m_k^{1-\alpha}}{\epsilon} - \frac{m_k\mu}{k\epsilon^2}\right) = 1.$$

Par ailleurs, h)iii. donne :

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \frac{m\mu}{k\epsilon^2} \leq P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[) \leq 1.$$

D'après les gendarmes, $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[) = 1$, ou encore :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\epsilon, \mu + 3\epsilon[\right) = 1.$$