TD3 - matrice d'une applications linéaire

Exercice 1 ★ ☆ ☆ ☆

Soient $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ et $\mathscr{C} = (\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}, \vec{\epsilon_3})$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (4x - y, x + 2y, 3y).$$

Ecrire la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 2 ★ ★ ☆ ☆

Soit $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + 2y - 5z, 2x + 3y).$$

1)Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2)Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3)Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'' = (\vec{e_3}, \vec{e_2}, \vec{e_1})$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆ ☆

Soit $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
Soit $\mathscr{C} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ avec $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que valent $f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), f(\vec{u_3})$ et $f(\vec{u_4})$?

Exercice 4 ★ ☆ ☆ ☆

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} = (x, y, z)$.

Exercice 5 ★ ☆ ☆ ☆

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}_2[X]$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On donne $P = X^3 + 2X^2 - X + 3$. Calculer $f(P)$.

Exercice 6 ★★☆☆

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

1)Déterminer une base de Imf. Quel est le rang de A ?

2)Déterminer une base de $Kerf$.

Exercice 7 ★★☆☆

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1)Préciser $f\left(\overrightarrow{e_3}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{e_4}\right)$, puis justifier que la famille $\left(f\left(\overrightarrow{e_3}\right), f\left(\overrightarrow{e_4}\right)\right)$ est libre.

2)Préciser $f\left(\overrightarrow{e_1}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{e_2}\right)$. Vérifier que $f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = f\left(\overrightarrow{e_3}\right) + f\left(\overrightarrow{e_4}\right)$.

3)A l'aide des questions précédentes, déterminer une base de Imf.
En déduire la dimension de $Kerf$.

4)Calculer $f\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right)$.

5)En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $Kerf$.

Exercice 8 ★★☆☆

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$f(x,y)=(2x+y,3x-y)$$

1)Déterminer la matrice A de f dans $\mathscr{B}$.

2)Calculer $(f \circ f)(x, y)$ de deux façons différentes :

− en écrivant la matrice B de $f \circ f$ dans $\mathscr{B}$,

− en faisant un calcul de composée avec la formule : $(f \circ f)(x, y) = f\big(f(x, y)\big)$.

Exercice 9 ★★☆☆

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}^4$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par :

$$f(P) = \big(P(-1), P(0), P(1), P'(0)\big).$$

1)Ecrire la matrice A de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

2)Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

3)En déduire que f est un isomorphisme, puis déterminer la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$.

4)Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 4$ et $P'(0) = 0$.

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

On pose $\vec{u} = (1,1,2)$, $\vec{v} = (0,3,2)$ et $\vec{w} = (0,0,1)$.

1)Vérifier que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

2)On note $\mathscr{B}' = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

a)Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Que déduire pour $\mathscr{B}'$?

b)Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.

c)En observant les colonnes de A', retrouver le résultat de la question 1), puis exprimer $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 11 ★ ★ ☆☆

Soient A, B et C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
On suppose que A et B sont semblables et que B et C sont semblables.
Montrer que A et C sont semblables.

Exercice 12 ★ ★ ★☆

Dans tout l'exercice, a désigne un paramètre réel.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & -2a-1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1)Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit inversible.

2)On suppose $a \neq -1/3$.
Calculer A^{-1}, puis déterminer l'unique vecteur $\vec{u}$ de $\mathbf{R}^3$ tel que $f(\vec{u}) = (2,-1,0)$.

Exercice 13 (extrait HEC 2013) ★ ★ ★★

On note Id l'application identique de $\mathbf{R}_3[X]$.
Pour tout endomorphisme v de $\mathbf{R}_3[X]$ et tout entier $k \geq 1$, on définit la k-ième application itérée de v par :

$$v^k = v \circ v^{k-1} = v^{k-1} \circ v,$$

en convenant que $v^0 = \mathrm{Id}$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $u^4 = 0$ et $u^3 \neq \mathrm{Id}$.

Soit $g = \mathrm{Id} + u + u^2 + u^3$.

1)Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$. On suppose que $P \notin Ker\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

2)Montrer que g est un automorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ et déterminer g^{-1} en fonction de u et Id.

3)Etablir l'égalité : $Ker\ u = Ker(g - \mathrm{Id})$.

Indications / Réponses

Exercice 1

$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1)$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2)$\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3)$\mathscr{M}_{\mathscr{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

$f\left(\overrightarrow{u_1}\right) = 1 + 2X - X^2$, $f\left(\overrightarrow{u_2}\right) = -2 + 2X^2$, $f\left(\overrightarrow{u_3}\right) = 4 + 3X$ et $f\left(\overrightarrow{u_4}\right) = 5X + X^2$.

Exercice 4

Le THM1 donne : $f\left(\overrightarrow{u}\right) = (x - 2y, 4x - y + z, 2y + 2z, x - 3z)$.

Exercice 5

Le THM1 donne : $f(P) = 6X^2 + 14X + 2$.

Exercice 6

1)Base de Imf : $\big((-3,1,1),(-2,1,4)\big)$. Puis, $rg(A) = rg(f) = dimImf = 2$.

2)On résout $AU = 0$ (voir THM1). Base de $Kerf$: $\big((-2,3,-1)\big)$.

Exercice 7

1)$f\left(\overrightarrow{e_3}\right) = (1,3,0,3)$ et $f\left(\overrightarrow{e_4}\right) = (2,1,3,-2)$.

2)$f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = (3,4,3,1)$ et $f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = (0,0,0,0)$.

3)Base de Imf : $\big((1,3,0,3),(2,1,3,-2)\big)$.

Le théorème du rang donne : $DimKerf = 2$.

4)$f\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right) = (0,0,0,0)$.

5)Base de $Kerf$: $\big((0,1,0,0),(1,0,-1,-1)\big)$.

Exercice 8

1)$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2)$(f \circ f)(x,y) = (7x + y, 3x + 4y)$.

Exercice 9

1)$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2)$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

3)$\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

4)P est tel que $f(P) = (2,1,4,0)$, on a donc $P = f^{-1}(2,1,4,0)$.

En utilisant A^{-1}, on déduit $P = X^3 + 2X^2 + 1$.

Exercice 10

2)a)$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$.

2)b)La formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$ donne : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2)c)Les colonnes de A' donnent :
$f\left(\vec{u}\right) = 1\vec{u}$, $f\left(\vec{v}\right) = 1\vec{u} + 1\vec{v}$ et $f\left(\vec{w}\right) = 2\vec{u} + 3\vec{v} + 1\vec{w}$.

Exercice 12

1)Transformer A par Gauss en une matrice triangulaire. On trouve $a \neq -1/3$.

2)$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3a+1} & \frac{a+2}{3a+1} & \frac{a}{3a+1} \\ \frac{1}{3a+1} & -\frac{a+2}{3a+1} & \frac{2a+1}{3a+1} \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = f^{-1}(2,-1,0) = \left(-1, -\frac{a+4}{3a+1}, \frac{a+4}{3a+1}\right)$.

Exercice 13

1)Etablir que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est libre en utilisant que $u^4 = 0$ et $P \notin Ker\left(u^3\right)$.

2)Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $(1 + x + x^2 + x^3)(1 - x)$.
S'inspirer de ce calcul pour trouver l'idée.

3)Cela revient à établir l'équivalence : $u(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$.
Pour cela, utiliser la question 2).