Exercice 1 (eml 2010)

Partie I

1)$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$AGA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$

$AHA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$

2)$\mathscr{S}_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}$

$\quad = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}$

$\quad = \mathrm{Vect}\,(F,G,H).$

Donc $\mathscr{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et (F,G,H) est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2$.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$aF + bG + cH = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = 0.$

Donc (F,G,H) est libre.

On conclut que (F,G,H) est une base de $\mathscr{S}_2$. De plus, $dim\mathscr{S}_2 = 3$.

3)a)Soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2$.

$u(S) = ASA$

$\quad = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\quad = \begin{pmatrix} 2b & 2c \\ 2a+3b & 2b+3c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

$\quad = \begin{pmatrix} 4c & 4b+6c \\ 4b+6c & 4a+12b+9c \end{pmatrix}.$

On constate que $u(S)$ est symétrique.

Ainsi, $\forall u \in \mathscr{S}_2,\ u(S) \in \mathscr{S}_2$.

> Remarque
> On pouvait aussi utiliser la transposée :
> ${}^t\big(u(S)\big) = {}^t(ASA)$
> $\quad = {}^tA\,{}^tS\,{}^tA$ en utilisant la formule : ${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$
> $\quad = ASA$ car A et S sont symétriques
> $\quad = u(S).$

b)D'abord u est « endo » d'après la question 3)a).

Ensuite, pour toutes matrices S et T de $\mathscr{S}_2$, pour tout réel λ :

$$\begin{aligned} u(\lambda S+T) &= A(\lambda S+T)A \\ &= (A\lambda S+AT)A \\ &= A\lambda SA+ATA \\ &= \lambda ASA+ATA \\ &= \lambda u(S)+u(T). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

On conclut que u est un endomorphisme de $\mathscr{S}_2$.

c)La question 1) donne :

$u(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0F + 0G + 4H,$

$u(G) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 0F + 4G + 12H,$

$u(H) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F + 6G + 9H.$

Donc $\mathscr{M}_{(F,G,H)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix} = M.$

Partie II

1)• $E_{-4}(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M+4I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (M+4I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 4x+4z &= 0 \\ 8y+6z &= 0 \\ 4x+12y+13z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\dfrac{3}{4}z \\ 0z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $E_{-4}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \text{ et } y = -\dfrac{3}{4}z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\dfrac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}.$

D'où $E_{-4}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

$E_{-4}(M)$ n'est pas nul, ce qui montre que -4 est valeur propre de M.
Le sous-espace propre de M associé à -4 est $E_{-4}(M)$.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_{-4}(M)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_{-4}(M)$.

• $E_1(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M - I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(M - I)U = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 4z & = 0 \\ 3y + 6z & = 0 \\ 4x + 12y + 8z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \\ 0z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 4z \text{ et } y = -2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$E_1(M)$ n'est pas nul, ce qui montre que 1 est valeur propre de M.
Le sous-espace propre de M associé à 1 est $E_1(M)$.

De même, $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(M)$.

• $E_{16}(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M - 16I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(M - 16I)U = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -16x + 4z & = 0 \\ -12y + 6z & = 0 \\ 4x + 12y - 7z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 4x \\ y = 2x \\ 0z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_{16}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = 4x \text{ et } y = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_{16}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

$E_{16}(M)$ n'est pas nul, ce qui montre que 16 est valeur propre de M.
Le sous-espace propre de M associé à 16 est $E_{16}(M)$.

De même, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{16}(M)$.

• M admet 3 valeurs propres distinctes et $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Donc M est diagonalisable.

2)Comme M est diagonalisable, elle peut s'écrire sous la forme réduite : $M = PDP^{-1}$ où :
– P est une matrice inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dont les colonnes forment une base des sous-espaces propres de M,
– D est une matrice diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dont la diagonale est formée des valeurs propres de M.

D est ici imposée. On construit donc P en mettant sur ses colonnes successives une base de $E_{-4}(M)$, $E_1(M)$ et $E_{16}(M)$.

Vue la contrainte imposée par l'énoncé sur la première ligne de P, on va changer la base de $E_{-4}(M)$ en multipliant le vecteur par -4, ce qui donne :

$E_{-4}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

On obtient finalement : $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3)$(D+4I)(D-I)(D-16I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le produit de matrices diagonales est diagonale, la diagonale étant obtenue en multipliant les éléments diagonaux, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(D+4I)(D-I)(D-16I) &= \begin{pmatrix} 0 \times (-5) \times (-20) & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 0 \times (-15) & 0 \\ 0 & 0 & 20 \times 15 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4)En développant l'égalité précédente, on obtient :

$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$, soit $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$.

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on déduit :

$$\begin{aligned}PD^3P^{-1} &= P\big(13D^2 + 52D - 64I\big)P^{-1} \\ &= 13PD^2P^{-1} + 52PDP^{-1} - 64PIP^{-1} \\ &= 13PD^2P^{-1} + 52M - 64I \quad (*)\end{aligned}$$

Enfin, $PD^2P^{-1} = PDIDP^{-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} = M^2$.
De même, $PD^3P^{-1} = M^3$.

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

> Remarque
> Une récurrence très classique montre que $\forall k \in \mathbf{N},\ PD^kP^{-1} = M^k$.

5)On sait que $M = \mathscr{M}_{(F,G,H)}(u)$.

D'après le cours, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a : $M^k = \mathscr{M}_{(F,G,H)}(u^k)$.
On a aussi, $I = \mathscr{M}_{(F,G,H)}(e)$.
L'égalité I.4) se réécrit alors :
$\mathscr{M}_{(F,G,H)}(u^3) = 13\mathscr{M}_{(F,G,H)}(u^2) + 52\mathscr{M}_{(F,G,H)}(u) - 64\mathscr{M}_{(F,G,H)}(e)$.
L'application $f \mapsto \mathscr{M}_{(F,G,H)}(f)$ étant linéaire, on a :
$\mathscr{M}_{(F,G,H)}(u^3) = \mathscr{M}_{(F,G,H)}(13u^2 + 52u - 64e)$.
Enfin, par bijectivité de l'application $f \mapsto \mathscr{M}_{(F,G,H)}(f)$:
$u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$.

Exercice 2 (ecricome 2007)

Partie I :

1)On vérifie aisément que $A^2 = A$.

Posons $P(X) = X^2 - X$. On a : $P(A) = A^2 - A = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A.

Les racines de P sont 0 et 1, ce qui entraîne que $sp(A) \subset \{0, 1\}$.
Les valeurs propres possibles de A sont donc 0 et 1.

> On pouvait aussi trouver les valeurs propres de A en annulant le déterminant de $A - \lambda I$, mais ce n'était pas la démarche proposée.

2)a)• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$AU = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y = & 0 \\ 6x - 2y = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow y = 3x.$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

$E_0(A)$ est non nul, ce qui confirme que 0 est bien valeur propre de A.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(A - I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x - y = & 0 \\ 6x - 3y = & 0 \end{array} \right.$
$\Longleftrightarrow y = 2x.$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

$E_1(A)$ est non nul, ce qui confirme que 1 est bien valeur propre de A.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

b)$A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet deux valeurs propres différentes donc A est diagonalisable par le corollaire du thm de réduction.

Il existe donc une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A et vu la contrainte posée par l'énoncé, on prend $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de A en respectant l'ordre des valeurs propres portées par D.

On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, la contrainte sur la première ligne de P est vérifiée.

On trouve ensuite $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ par la formule de cours.

Partie II :

1)Le produit et la différence de deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ reste dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Donc $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \phi(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
ϕ est donc « endo ».

Pour toutes matrices M de N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) \\ &= \lambda\phi(M) + \phi(N).\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire.

ϕ est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)a)
$$\begin{aligned}\phi(M) = \lambda M &\iff AM - MA = \lambda M \\ &\iff PDP^{-1}M - MPDP^{-1} = \lambda M \\ &\iff P^{-1}(PDP^{-1}M - MPDP^{-1})P = P^{-1}\lambda MP \\ &\iff P^{-1}PDP^{-1}MP - P^{-1}MPDP^{-1}P = \lambda P^{-1}MP \\ &\iff DN - ND = \lambda N.\end{aligned}$$

2)b)$DN - ND = \lambda N$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b = -b \\ \lambda c = c \\ \lambda d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda a & = 0 \\ (\lambda+1)b & = 0 \\ (\lambda-1)c & = 0 \\ \lambda d & = 0 \end{cases}$$

c)Remarquons déjà que $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$.

$M \in Ker(\phi - \lambda Id)$

$\iff (\phi - \lambda Id)(M) = 0$

$\iff \phi(M) - \lambda M = 0$

$\iff \phi(M) = \lambda M$

$\iff M = PNP^{-1}$ avec $DN - ND = \lambda N$ d'après II.2a)

$\iff M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ où (a,b,c,d) est solution de (S)

$\iff M = \begin{pmatrix} -2a+3b-2c+3d & a-b+c-d \\ -6a+9b-4c+6d & 3a-3b+2c-2d \end{pmatrix}$ où (a,b,c,d) est solution de (S).

d)Distinguons plusieurs cas :

• $\lambda = 0$

(S) est équivalent à : $\left\{\begin{array}{ll} b & = 0 \\ -c & = 0 \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{ll} b & = 0 \\ c & = 0 \end{array}\right.$.

Les solutions de (S) sont donc de la forme $(a, 0, 0, d)$ où a et d sont des réels quelconques.

• $\lambda = 1$

(S) est équivalent à : $\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ 2b & = 0 \\ d & = 0 \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ b & = 0 \\ d & = 0 \end{array}\right.$.

Les solutions de (S) sont donc de la forme $(0, 0, c, 0)$ où c est un réel quelconque.

• $\lambda = -1$

(S) est équivalent à : $\left\{\begin{array}{ll} -a & = 0 \\ -2c & = 0 \\ -d & = 0 \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{array}\right.$.

Les solutions de (S) sont donc de la forme $(0, b, 0, 0)$ où b est un réel quelconque.

• $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$

(S) est équivalent à : $\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{array}\right.$.

L'unique solution de (S) est $(0, 0, 0, 0)$.

3)a)Lorsque $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, on a vu que l'unique solution de (S) est (0,0,0,0).
En utilisant la question II.2)c) avec $a = b = c = d = 0$, on conclut :

$M \in Ker(\phi - \lambda Id) \Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $Ker(\phi - \lambda Id) = \{0\}$.

b)En utilisant les questions II.2c) et II.2d), on obtient :

$$\bullet\ Ker(\phi) = \left\{\begin{pmatrix} -2a+3d & a-d \\ -6a+6d & 3a-2d \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbf{R}^2)\right\}$$
$$= \left\{a\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbf{R}^2)\right\}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $Ker\phi$.

Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires.
C'est donc une base de $Ker\phi$.

$$\bullet\ Ker(\phi - Id) = \left\{\begin{pmatrix} -2c & c \\ -4c & 2c \end{pmatrix}, c \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $Ker(\phi - Id)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul.
C'est donc une base de $Ker(\phi - Id)$.

• $Ker(\phi+Id)=\left\{\begin{pmatrix} 3b & -b \\ 9b & -3b \end{pmatrix}, b\in\mathbf{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $Ker(\phi+Id)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul.
C'est donc une base de $Ker(\phi+Id)$.

4)On sait que $B-\lambda I=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi-\lambda Id)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

λ est valeur propre de B

$\Longleftrightarrow B-\lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \phi-\lambda Id$ n'est pas bijective

$\Longleftrightarrow Ker(\phi-\lambda Id)\neq\{0\}$

$\Longleftrightarrow \lambda\in\{-1,0,1\}$ grâce à la question 3)

Les valeurs propres de B sont donc -1, 0 et 1.

5)a)Soit $\mathscr{B}=(E_1,E_2,E_3,E_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

$\phi(E_1)=AE_1-E_1A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

$\phi(E_2)=AE_2-E_2A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$\phi(E_3)=AE_3-E_3A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$\phi(E_4)=AE_4-E_4A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$\phi(E_1)=0E_1+1E_2+6E_3+0E_4$,

$\phi(E_2)=-6E_1+5E_2+0E_3+6E_4$,

$\phi(E_3)=-1E_1+0E_2-5E_3+1E_4$,

$\phi(E_4)=0E_1-1E_2-6E_3+0E_4$.

$$\text{Donc } B=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)On va chercher les valeurs propres de B en transformant $B-\lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$B-\lambda I=\begin{pmatrix} -\lambda & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -5-\lambda & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -5-\lambda & -6 \\ 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ -\lambda & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3\leftrightarrow L_1 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -5-\lambda & -6 \\ -\lambda & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6(5-\lambda) & 5+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-6 & -1 & -\lambda \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow 6L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow \lambda L_1 + L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6(5-\lambda) & 5+\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(5-\lambda) & 0 & -2\lambda \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(5-\lambda) & 0 & -2\lambda \\ 0 & 6(5-\lambda) & 5+\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_4 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(5-\lambda) & \lambda^3-5\lambda^2+12\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda(5-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \lambda(5-\lambda)L_2 - 6L_3 \\ L_4 \leftarrow (5-\lambda)L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda(5-\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda(5-\lambda) & \lambda^3-5\lambda^2+12\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda(5-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & a(\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow (5-\lambda)L_3 + 2L_4 \end{array}$$

avec $a(\lambda) = -\lambda(5-\lambda)^2 + 2(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 12\lambda)$

$$\begin{aligned} &= -\lambda(5-\lambda)^2 + 2\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 12) \\ &= \lambda(-(5-\lambda)^2 + 2(\lambda^2 - 5\lambda + 12)) \\ &= \lambda(-25 + 10\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - 10\lambda + 24) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 1). \end{aligned}$$

λ est valeur propre de B

$\iff -2\lambda = 0$ ou $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\iff \lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 3 (edhec 2009)

1)$x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$ par produit et composée de fonctions continues, et ne s'annule pas sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$.
$x \mapsto -x$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$.
Par quotient, f est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$
Par ailleurs, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$. Donc $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$.
$\lim\limits_{x\to 0}(1-x) = 1$ donc $1-x \underset{0}{\sim} 1$.
Par produit d'équivalents, $(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$.
Puis, par quotient, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x}{-x} = 1$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et comme $f(0) = 1$ par énoncé, cela entraîne que f est continue en 0.
En conclusion, f est continue sur $]-\infty,1[$.
2)a)Soit $g : x \mapsto \ln(1-x)$.
g est de classe C^2 sur $]-\infty,1[$. Elle admet un DL d'ordre 2 en 0 donné par :
$g(x) \underset{0}{=} g(0) + g'(0)x + \dfrac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.
Or, $\forall x < 1,\ g'(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ et $g''(x) = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$.
$g(0) = 0$, puis $g'(0) = -1$ et $g''(0) = -1$.
D'où, $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

> On peut aussi partir du DL usuel : $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, puis remplacer x par $-x$. C'est légitime car $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.

b)Pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$, on a :
$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \dfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)}$.
En reprenant les équivalents trouvés à la question 1), on a :

$$x(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x^2 \quad (1)$$

Pour le numérateur, on va utiliser le DL trouvé en 2)a) :

$$\begin{aligned}
-x-(1-x)\ln(1-x) &= -x-(1-x)\big(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) \\
&= -x - \big(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^2 + \frac{x^3}{2} - xo(x^2)\big) \\
&= -\frac{x^2}{2} - o(x^2) + xo(x^2) \\
&= -\frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Donc $-x-(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \quad (2)$

Par quotient des équivalents (1) et (2), on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'0) = \dfrac{1}{2}$.

3)a)$x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$ par produit et composée de fonctions dérivables, et ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.
$x \mapsto -x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.
Par quotient, f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.

Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1)\times(1-x)\ln(1-x) - \big(-\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\times(1-x)\big)\times(-x)}{\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2} \\ &= \frac{(x-1)\ln(1-x) - x\big(\ln(1-x)+1\big)}{\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - x}{\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2}. \end{aligned}$$

$\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est bien du signe de $-\ln(1-x)-x$.

b)Soit $h : x \mapsto \ln(1-x)+x$.

h est dérivable sur $]-\infty, 1[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

$\forall x < 1,\ h'(x) = -\dfrac{1}{1-x} + 1 = \dfrac{-x}{1-x}$ du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

La lecture du tableau de variations donne : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0,1[< 1,\ h(x) < 0$.

Or, $f'(x)$ est du signe de $-h(x)$. Donc f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$, mais également en 0 car $f'(0) = 1/2$.

Ainsi, $\forall x < 1,\ f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$.

c)• On a $1-x \underset{-\infty}{\sim} -x$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(1-x)}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$. Par composition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x) = +\infty$.

Par inverse, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln(1-x)} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{t\to0^+} t\ln t = 0^-$ par croissances comparées.

$\displaystyle\lim_{x\to1^-} -x = -1$.

Par quotient, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)a)f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$. Elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$. Or, $n \in \mathbf{N}^*$ appartient à $[1,+\infty[$. Il admet un unique antécédent u_n par f et $u_n \in [0,1[$.

u_1 est l'unique réel de $[0,1[$ vérifiant $f(u_1) = 1$. Or, $f(0) = 1$.
Par unicité de u_1, on a donc nécessairement $u_1 = 0$.

b)D'après le cours, f^{-1} a même variation que f.

x	0		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

De l'égalité $f(u_n) = n$, on tire : $u_n = f^{-1}(n)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 1$. Par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.