Exercice 1 (edhec 2024)

1)a)Pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$\dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{a(2+x)+b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{(2a+2b)+(a-b)x}{4-x^2}$

$\Longleftrightarrow 1 = (2a+2b)+(a-b)x$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4b=1 \\ a=b \end{cases}$

$\Longleftrightarrow a=b=\dfrac{1}{4}.$

b)$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1/4}{2-x}+\frac{1/4}{2+x}\right)dx = \frac{1}{4}\big[-\ln(2-x)+\ln(2+x)\big]_0^1$

$= \dfrac{1}{4}\big((-\ln 1+\ln 3)-(-\ln 2+\ln 2)\big) = \dfrac{1}{4}\ln 3.$

2)$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln(4-x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 4).$

Comme $\ln 4 = 2\ln 2$, on peut simplifier un peu et obtenir : $u_1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 3$ ou éventuellement $u_1 = \ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

3)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
4u_n - u_{n+2} &= 4\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 x^n dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

b)programme Python

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1:                  #n est pair
        u=np.log(3)/4               #u=u0
        for k in range(2,n+1,2):    #k avance avec un pas de 2
            u=4*u-1/(k-1)
    else:                           #n est impair
        u=np.log(2/np.sqrt(3))      #u=u1
        for k in range(3,n+1,2):    #k avance avec un pas de 2
            u=4*u-1/(k-1)
    return u
```

> Remarque
> L'instruction `u=4*u-1/(k-1)` provient de la question 3)a) d'où l'on peut déduire en faisant $n \to k-2$:
> $u_k = 4u_{k-2} - \dfrac{1}{k-1}$.

4)a)La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$ a pour dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2x}{(4-x^2)^2}$.
$\forall x \in [0,1],\ f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0,1]$.
On déduit $\forall x \in [0,1],\ f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, soit $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4-x^2} \leq \dfrac{1}{3}$.
Puis, en multipliant membre à membre par x^n (positif), on a :

$$\frac{1}{4}x^n \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{1}{4}x^n.$$

Par croissance de l'intégrale $(0 < 1)$, on déduit :

$$\int_0^1 \frac{1}{4}x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{3}x^n dx.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4}x^n dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{4(n+1)}$.
De même, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}x^n dx = \frac{1}{3(n+1)}$, ce qui donne finalement :

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) $\dfrac{1}{4(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n}$ diverge car de même nature que la série harmonique divergente $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge.

Enfin, comme $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq \frac{1}{4(n+1)}$, on peut conclure d'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

5)b)programme Python

```
x=np.arange(0,41)                #x est un entier entre 0 et 40
u=[]
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))       #on ajoute à la liste u le terme 3nu_n
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

A la fin de la boucle, la liste u est constitué des termes v_0, v_1, ..., v_{40} de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = 3nu_n$.

Le graphique semble montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et converge vers 1.

Cela signifie que $3nu_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, c'est-à-dire : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

b)Effectuons une intégrations par parties dans $\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx$ en posant :

$u'(x) = x^n \qquad v(x) = \frac{1}{4-x^2}$

$u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad v'(x) = \frac{2x}{\left(4-x^2\right)^2}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, ce qui valide l'IPP et donne :

$\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{4-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{2x}{\left(4-x^2\right)^2}dx$

ce qui donne immédiatement :

$$u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx.$$

c)On a déjà prouvé dans la question 4)a) que $\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$.

Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_+$, on déduit en élevant au carré :

$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{16} \leq \frac{1}{\left(4-x^2\right)^2} \leq \frac{1}{9}$.

Puis, en multipliant membre à membre par x^{n+2} positif :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{16}x^{n+2} \leq \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2} \leq \frac{1}{9}x^{n+2}.$$

Par croissance de l'intégrale ($0 < 1$), on déduit :

$$\int_0^1 \frac{1}{16}x^{n+2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{9}x^{n+2}dx.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{16}x^{n+2}dx = \frac{1}{16}\left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{16(n+3)}$.

De même, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{9}x^{n+2}dx = \frac{1}{9(n+3)}$ et on peut conclure que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx \leq \frac{1}{9(n+3)}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{16(n+3)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{9(n+3)} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx = 0$.

d)L'égalité 5)b) donne en multipliant membre à membre par $3n$:

$\displaystyle\forall n \in \mathbf{N},\ 3nu_n = \frac{n}{n+1} - \frac{6n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ car $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{6n}{n+1} = 6$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}dx = 0$ d'après 5)c).

On déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3nu_n = 1$, ce qui confirme que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.

Exercice 2 (edhec 2024)

1)• f est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle et continue sur $[0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.

• $\forall x<0,\ f(x)=0$ et $\forall x\geq 0,\ f(x)\geq 0$ car $e^{-x^2/2}>0$. Donc $\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)\geq 0$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty,0[$.

Pour tout réel $A>0$, on a :
$$\int_0^A f(x)dx=\int_0^A xe^{-x^2/2}dx=\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A=1-e^{-A^2/2}.$$
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}-\frac{A^2}{2}=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}e^t=0$. Par composée, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}e^{-A^2/2}=0$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx=1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx=0+1=1.$

On conclut que f est une densité de probabilité.

b)Soit $T\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$.
T admet une variance donnée par la formule de Koenig : $V(T)=E\big(T^2\big)-E(T)^2$.
On déduit : $E\big(T^2\big)=V(T)+E(T)^2=1+0^2=1$.

c)Notons $\varphi : x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ la densité de $\mathscr{N}(0,1)$. Soit $T\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$.

• X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|dx$ converge, ce qui se ramène à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ car f est nulle sur $]-\infty,0[$ et positive sur $[0,+\infty[$.

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}dx=\int_0^{+\infty}\sqrt{2\pi}x^2\varphi(x)dx.$

Cette intégrale a même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\varphi(x)dx$ qui converge du fait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx$ représente le moment d'ordre 2 de T. Donc X admet une espérance.

• $$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_0^{+\infty} xf(x)dx\\&=0+\int_0^{+\infty}\sqrt{2\pi}x^2\varphi(x)dx\\&=\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} x^2\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x^2\varphi(x)$ étant paire, on poursuit le calcul :
$$\int_0^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{2} \times E(T^2) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$
On conclut que $E(X) = \sqrt{2\pi} \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2)Par définition, pour tout x réel, on a : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Distinguons deux cas.

Premier cas : $x < 0$
f est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc sur $]-\infty, x]$, ce qui mène à $F_X(x) = 0$.

Deuxième cas : $x \geq 0$
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= 0 + \int_0^x te^{-t^2/2}dt \\ &= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x \\ &= 1 - e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$
En conclusion, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3)a)Pour tout x réel, on a : $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x)$.

Distinguons deux cas.

Premier cas : $x < 0$
Comme X^2 ne prend que des valeurs positives, l'événement $(X^2 \leq x)$ est impossible. Donc $F_Z(x) = 0$.

Deuxième cas : $x \geq 0$
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(X^2 \leq x) \\ &= P\left(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{x}\right) \\ &= P\left(|X| \leq \sqrt{x}\right) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_x\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) \end{aligned}$$
Comme $-\sqrt{x} \leq 0$, on a : $F_X\left(-\sqrt{x}\right) = 0$.

Par ailleurs, $F_x\left(\sqrt{x}\right) = 1 - e^{-\left(\sqrt{x}\right)^2/2} = 1 - e^{-x/2}$.

En conclusion, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1/2.
Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(1/2)$.

b)Programme Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulX():
    Z=rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

4)a)Pour tout x réel, on a :

$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\dfrac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(X \leq x\sqrt{n}\right) = F_X\left(x\sqrt{n}\right)$.

Par calcul de composée, on a :

$$F_X\left(x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\sqrt{n} < 0 \\ \\ 1 - e^{-\left(x\sqrt{n}\right)^2/2} & \text{si } x\sqrt{n} \geq 0 \end{cases}$$

D'où $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b)Il faut pour x **fixé**, chercher la limite de $G_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

Distinguons deux cas :

Premier cas : $x \leq 0$
Comme G_n est nulle sur $]-\infty, 0]$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Deuxième cas : $x > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{nx^2}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$. Par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx^2/2} = 0$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$.

Posons $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Soit V une variable aléatoire certaine égale à 0. La fonction de répartition de V est G.

Les calculs de limites faits plus haut prouvent que en tout point où G est continue, c'est-à-dire en tout réel $x \neq 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$.

On peut donc conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers V.

> Remarque
> L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$ est fausse en 0 car $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(0) = 0$ et $G(0) = 1$.
> Ce n'est pas grave car dans la définition de convergence en loi, on doit prendre le réel x, là où G est continue.

c)Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} P\big(|Y_n| > \epsilon\big) &= P\big((Y_n < -\epsilon) \cup (Y_n > \epsilon)\big) \\ &= P(Y_n < -\epsilon) + P(Y_n > \epsilon) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(Y_n < -\epsilon) + 1 - P(Y_n \leq \epsilon) \\ &= G_n(-\epsilon) + 1 - G_n(\epsilon). \end{aligned}$$

$-\epsilon < 0$ donc $G_n(-\epsilon) = 0$. Par ailleurs, $\epsilon > 0$ donc $G_n(\epsilon) = 1 - e^{-n\epsilon^2/2}$.

On a donc $\forall \epsilon > 0,\ P\big(|Y_n| > \epsilon\big) = e^{-n\epsilon^2/2}$.

On déduit immédiatement : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(|Y_n| > \epsilon\big) = 0$.

> Remarque
> Cela signifie que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 (hors programme).

5)a)• Soit x un réel.

D'après le cours, $(M_n > x) = (X_1 > x) \cap ... \cap (X_n > x)$.

Les variables aléatoires X_1, ..., X_n étant mutuellement indépendantes, on déduit :

$$\begin{aligned} P(M_n > x) &= P(X_1 > x) \times \cdots \times P(X_n > x) \\ &= P(X > x) \times \cdots \times P(X > x) \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\ &= P(X > x)^n \\ &= \big(1 - P(X \leq x)\big)^n \\ &= \big(1 - F_X(x)\big)^n. \end{aligned}$$

• La question 2) donne : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc $1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

puis, $P(M_n > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Enfin, $F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = 1 - P(M_n > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c'est-à-dire, $F_{M_n}(x) = G_n(x) =$.

Les fonctions de répartition de M_n et Y_n sont identiques, ce qui signifie que M_n et Y_n ont même loi.

b)Programme Python

```
def simulM(n):
    X=np.array([simulX() for k in range(n)])
    M=np.min(X)
    return M
```

Exercice 3 (edhec 2024)

1)Soit x un réel et soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt$, posons $u=x-t$ ou encore $t=\underbrace{x-u}_{\varphi(u)}$.

- $t=0 \Longleftrightarrow u=x$ et $t=x \Longleftrightarrow u=0$
- $tf(x-t)=(x-u)f(u)$
- $dt=\varphi'(u)du=-du$.

La fonction φ est affine donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, ce qui valide le changement de variable. On obtient :

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0 (x-u)f(u)\times(-du)=\int_0^x (x-u)f(u)du.$$

D'où le résultat demandé.

2)a)f étant solution du problème, elle vérifie $(**)$. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x)&=1+\int_0^x (x-u)f(u)du\\ &=1+\int_0^x \big(xf(u)-uf(u)\big)du\\ &=1+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du \quad (1)\end{aligned}$$

$I : x\mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)du$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}$ car f est continue sur $\mathbf{R}$.

I est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R},\ I'(x)=f(x)$.

$J : x\mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)du$ est une primitive de $x\mapsto xf(x)$ sur $\mathbf{R}$ car $x\mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

J est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R},\ J'(x)=xf(x)$.

En revenant à (1), on peut dire que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ par somme et produit de fonctions de classe C^1.

$\forall x\in\mathbf{R},\ f'(x)=1\times\displaystyle\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du.$

b)D'après la question précédente, $f' : x\mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)du$.

Or, cette fonction définie par une intégrale est une primitive sur $\mathbf{R}$ de f.

Donc f' est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R},\ f''(x)=f(x)$.

c)L'équation différentielle est $y''-y=0$ (E).
Son équation caractéristique est $r^2-1=0$, les racines sont 1 et -1.

D'après le cours, les solutions de (E) sont : $x\mapsto \alpha e^x+\beta e^{-x}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$.

d)En remplaçant x par 0 dans $(*)$, on a : $f(0)=1+\displaystyle\int_0^0 tf(-t)dt=1$.

En remplaçant x par 0 dans 2)a), on a : $f'(0)=\displaystyle\int_0^0 f(u)du=0$.

Par ailleurs, f étant solution de (E), il existe des réels α et β tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \quad (1)$$

On obtient en dérivant :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x} \quad (2)$$

En remplaçant x par 0 dans (1) et (2), on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta = f(0) \\ \alpha - \beta = f'(0) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \end{array}\right.$$

En reportant ces valeurs dans (1), on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}e^{-x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On vient donc d'établir que si f est solution de $(*)$, alors ce ne peut être que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, ce qui répond à la question.

3)Il s'agit d'étudier la réciproque. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Vérifions que f est bien solution de $(*)$ ou ce qui revient au même de $(**)$.
Soit x un réel fixé.
Faisons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^x (x-u)f(u)du = \int_0^x (x-u)\frac{e^u + e^{-u}}{2}du$.
On pose :

$g(u) = x - u \qquad h'(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$

$g'(u) = -1 \qquad h(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$

g et h sont de classe C^1 sur $[0, x]$, ce qui valide l'IPP et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-u)f(u)du &= \left[(x-u)\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right]_{u=0}^{u=x} - \int_0^x -\frac{e^u - e^{-u}}{2}du \\
&= 0 + \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{2}du \\
&= \left[\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right]_0^x \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \\
&= f(x) - 1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-u)f(u)du$.

Ainsi, f est solution de $(**)$ donc de $(*)$.

Compte tenu de la question 2)d), on peut conclure que $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est la seule solution de $(*)$.

4)Cherchons s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^x t f(x-t)dt \quad (***)$$

Par le même changement de variable que dans la question 1), on montre que $(***)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^x (x-u)f(u)du \quad (****)$$

Supposons qu'on dispose d'une fonction f solution de $(****)$.

En reprenant la question 2)a), on obtient $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)du$,

puis par la question 2)b) : $\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = f(x)$.

f est alors de la forme : $f : t \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

$(****)$ donne : $f(0) = 0$ et on a toujours $f'(0) = 0$.

On résout ensuite le système : $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = f(0) = 0 \\ \alpha - \beta = f'(0) = 0 \end{array}\right.$

et on obtient $\alpha = \beta = 0$. Donc f est nulle.

Réciproquement, la fonction nulle est clairement solution de $(***)$.

On conclut que la seule solution vérifiant $(***)$ est la fonction nulle.

Problème (edhec 2024)

1)a)Au début de l'expérience, l'urne A contient 1 blanches. Donc X_0 est certaine et égale à 1.
On a donc $a_0 = P(X_0 = 0) = 0$, $b_0 = P(X_0 = 1) = 1$ et $c_0 = P(X_0 = 2) = 0$.

b)$X_1(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.

L'événement $(X_1 = 0)$ est réalisé si et seulement si lors de la première épreuve, on tire la blanche dans l'urne A et la noire dans l'urne B.

Par indépendance des tirages, on a : $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Par symétrie, on a également : $P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{4}$ (reprendre le raisonnement en échangeant blanc et noir).

On déduit $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

On a donc $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $c_1 = \dfrac{1}{4}$.

c)Après chaque épreuve, l'urne A contient toujours deux boules :
− 0 blanches et 2 noires, auquel cas $(X_n = 0)$ est réalisé,
− 1 blanche et 1 noire, auquel cas $(X_n = 1)$ est réalisé,
− 2 blanches et 0 noire, auquel cas $(X_n = 2)$ est réalisé.

Donc $\Omega = (X_n = 1) \cup (X_n = 2) \cup (X_n = 3)$.

Et les événements $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$ et $(X_n = 3)$ sont incompatibles 2 à 2.

Donc $\big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\big)$ est un système complet d'événements.

d)On déduit : $P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1$.

Ainsi, $a_n + b_n + c_n = 1$.

2)a)• Supposons $(X_n = 0)$ réalisé.
L'urne A ne contient que des noires et l'urne B que des blanches.
Lors de la $n+1$-ème épreuve, on va nécessairement tirer une noire dans l'urne A et une blanche dans l'urne B, puis les échanger. L'urne A contiendra alors 1 blanche et 1 noire. L'événement $(X_{n+1} = 1)$ est alors sûr d'être réalisé.

On obtient :

$$\begin{cases} P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0 \\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1 \\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0 \end{cases}$$

• Supposons $(X_n = 1)$ réalisé.
L'urne A contient alors 1 blanche et 1 noire, l'urne B aussi. On se retrouve dans la configuration de la question 1)b).

On obtient :

$$\begin{cases} P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = a_1 = 1/4 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = b_1 = 1/2 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = c_1 = 1/4 \end{cases}$$

• Supposons $(X_n = 2)$ réalisé.
La situation est symétrique au premier cas en échangeant blanc et noir.

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0 \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1 \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0 \end{array}\right.$$

Le graphe est conforme aux probabilités qu'on a trouvées.

b)La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des éléments de chaque ligne de M fait bien 1.

> Remarque
> M est stochastique.

c)La formule des probas totales pour le sce $\big((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2)\big)$ donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=0) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)P(X_n=2) \\ &= 0P(X_n=0)+\frac{1}{4}P(X_n=1)+0P(X_n=2) \\ &= \frac{1}{4}P(X_n=1). \\ P(X_{n+1}=1) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)P(X_n=2) \\ &= 1P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+1P(X_n=2) \\ &= P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2). \\ P(X_{n+1}=2) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)P(X_n=2) \\ &= 0P(X_n=0)+\frac{1}{4}P(X_n=1)+0P(X_n=2) \\ &= \frac{1}{4}P(X_n=1). \end{aligned}$$

On obtient ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n \\ \\ b_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2}b_n+c_n \\ \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n \end{array}\right.$$

3)On avait trouvé $a_0=0$, $b_0=1$ et $c_0=0$, ainsi que $a_1=\dfrac{1}{4}$, $b_1=\dfrac{1}{2}$ et $c_1=\dfrac{1}{4}$.

On a bien : $\left\{\begin{array}{c} a_1=\dfrac{1}{4}b_0 \\ \\ b_1=a_0+\dfrac{1}{2}b_0+c_0 \\ \\ c_1=\dfrac{1}{4}b_0 \end{array}\right.$

4)a)X_{n+1} est discrète finie et de support égal à $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= 0 \times P(X_{n+1} = 0) + 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) \\
&= 0 \times a_{n+1} + 1 \times b_{n+1} + 2 \times c_{n+1} \\
&= b_{n+1} + 2c_{n+1}.
\end{aligned}$$

b)On poursuit le calcul précédent en utilisant les égalités 2)c) :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\
&= \left(a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) + 2 \times \frac{1}{4}b_n \\
&= a_n + b_n + c_n \\
&= 1 \quad \text{d'après 1)d).}
\end{aligned}$$

c)L'égalité précédente appliquée pour $n \to n - 1$ donne :

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ E(X_n) = 1$, c'est-à-dire $b_n + 2c_n = 1$.

L'égalité reste vraie pour $n = 0$ puisque $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ b_n + 2c_n = 1$.

5)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1}V &= 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} \\
&= 2 \times \frac{1}{4}b_n - \left(a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) + 2 \times \frac{1}{4}b_n \\
&= -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n \\
&= -\frac{1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n) \\
&= -\frac{1}{2}U_nV.
\end{aligned}$$

La suite $(U_nV)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

b)On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$: $U_nV = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n U_0V$, c'est-à-dire :

$2a_n - b_n + 2c_n = (2a_0 - b_0 + 2c_0)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$, on a finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

6)Les questions précédentes mènent au système :

$$\begin{cases}
a_n + b_n + c_n = 1 & L_1 \\
b_n + 2c_n = 1 & L_2 \\
2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & L_3
\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 & L_1 \\ b_n + 2c_n = 1 & L_2 \\ 3b_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 & L_1 \\ b_n + 2c_n = 1 & L_2 \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

En substituant b_n dans L_2, on obtient :
$2c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, soit $c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
Puis, en substituant b_n et c_n dans L_1 :
$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
$a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$ et $c_n = P(X_n = 2)$. On a donc :

$$\begin{cases} P(X_n = 0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ P(X_n = 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ P(X_n = 2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$.

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ et de loi donnée par :
$P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{2}{3}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{6}$.

On a alors $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X.

8)$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/16 & 5/8 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que $2M^3 = M^2 + M$.

b)Posons $P(X) = 2X^3 - X^2 - X$. On a $P(M) = 2M^3 - M^2 - M = 0$ grâce à 8)a).
Donc P est un polynôme annulateur de M.

Les valeurs propres de M sont donc à chercher parmi les racines de P.

Or, $P(x) = 0 \iff x(2x^2 - x - 1) = 0 \iff x = 0$ ou $2x^2 - x - 1 = 0$

Les racines de $2x^2 - x - 1$ sont 1 (évidente) et $-\dfrac{1}{2}$.

Les racines de P sont donc $-\dfrac{1}{2}$ 0 et 1. Donc $sp(M) \subset \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$.

• $E_{-1/2}(M) = \left\{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid \left(M + \dfrac{1}{2}I\right)U = 0\right\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left(M + \frac{1}{2}I\right)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{1}{4}x + y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} y = -\frac{1}{2}x \\ z = x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1/2}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -\dfrac{1}{2}x \text{ et } z = x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{1}{2}x \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$.

Ainsi, $E_{-1/2}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

$E_{-1/2}(M)$ est non nul, ce qui confirme que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de M.

$E_{-1/2}(M)$ est donc le sous-espace propre de M associé à $-\dfrac{1}{2}$.

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_{-1/2}(M)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_{-1/2}(M)$.

• $E_0(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid MU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
MU = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } x = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$.

Ainsi, $E_0(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_0(M)$ est non nul, ce qui confirme que 0 est valeur propre de M.

$E_0(M)$ est donc le sous-espace propre de M associé à 0.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(M)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(M)$.

- $E_1(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(M - I)U = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y = 0 \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = x \text{ et } z = x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$.

Ainsi, $E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_1(M)$ est non nul, ce qui confirme que 1 est valeur propre de M.

$E_1(M)$ est donc le sous-espace propre de M associé à 1.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(M)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(M)$.

c)Notons $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la question 8)b), V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de M associés à trois valeurs propres disctinctes. Donc la famille (V_1, V_2, V_3) est libre.

C'est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont le cardinal est 3 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Donc (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$

P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3). Donc P est inversible.

d)$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On observe que $MP = PD$, ce qui donne : $M = PDP^{-1}$ et prouve que M est diagonalisable.

> Remarque
> On pouvait retrouver ce résultat par le théorème de réduction ou en mentionnant que $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes.

e)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} U_nM &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_n & a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n & \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1}. \end{aligned}$$

f)Par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $U_n = U_0M^n$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $U_0 = U_0M^0$ », ce qui est vraie puisque $M^0 = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_nM \quad \text{d'après 8)e)} \\ &= (U_0M^n)\,M \quad \text{par HR} \\ &= U_0M^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = U_0M^n$

g)Des questions précédentes, on déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$M^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence classique)

puis, $U_n = U_0PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il reste à faire le produit des quatre matrices pour obtenir U_n, c'est-à-dire la loi de X_n et retrouver le résultat de la question 6).