Chapitre 1 : espaces vectoriels

I)Espace vectoriel

Déf : un *espace vectoriel* E est un ensemble d'objets, appelés *vecteurs* que l'on peut additionner entre eux avec l'opération $\ll + \gg$, que l'on peut multiplier par un nombre réel avec l'opération $\ll . \gg$ et satisfaisant les règles suivantes :

R1) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$ (*stabilité* pour $\ll + \gg$)

R2) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda . \overrightarrow{u} \in E$ (*stabilité* pour $\ll . \gg$)

R3) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (*symétrie*)

R4) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall \overrightarrow{w} \in E, (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (*associativité*)

R5)Il existe un vecteur nul, noté $\overrightarrow{0_E}$ tel que $\forall \overrightarrow{u} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

R6) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists \overrightarrow{u'} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$

R7) $\forall \overrightarrow{u} \in E, 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

R8) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda . (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda . \overrightarrow{u} + \lambda . \overrightarrow{v}$ (*distributivité*)

R9) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, (\lambda + \mu) . \overrightarrow{u} = \lambda . \overrightarrow{u} + \mu . \overrightarrow{u}$ (*distributivité*)

R10) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \lambda . (\mu . \overrightarrow{u}) = (\lambda \mu) . \overrightarrow{u}$

Remarques
1)$\forall \overrightarrow{u} \in E, 0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$
2)$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda . \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$
3)$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \overrightarrow{u} \in E,\ \lambda . \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E} \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$
4)Dans la règle R6, on a : $\overrightarrow{u'} = (-1).\overrightarrow{u}$ que l'on notera $-\overrightarrow{u}$.

Exemples
1)$E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et en particulier $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

2)$E = \mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n), x_1 \in \mathbf{R}, ..., x_n \in \mathbf{R}\}$ car on peut l'identifier à l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ des matrices à 1 ligne et n colonnes.

3)$E = \mathbf{R}[X] = \{\text{polynômes}\}$ ou $E = \mathbf{R}_n[X] = \{\text{polynomes de degré} \leq n\}$.

4)$E = \{\text{fonctions de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}\}$.

Contre-exemples
1)$E = \{\text{matrices inversibles de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R})\}$ n'est pas un espace vectoriel car la stabilité fait défaut pour $\ll + \gg$.

En effet, $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ appartiennent à E, alors que

$u + v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E.

2)$E = \{\text{fonctions positives de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel car la stabilité fait défaut pour $\ll . \gg$.
En effet, si $f \in E$, alors $\lambda . f \notin E$ pour $\lambda < 0$.

II)Combinaison linéaire

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E est *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ s'il existe des réels $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que $\overrightarrow{u}=\lambda_1.\overrightarrow{u_1}+...+\lambda_n.\overrightarrow{u_n}$.

Exercice 1
$E=\mathbf{R}^2$, $\overrightarrow{u_1}=(1,2)$, $\overrightarrow{u_2}=(2,-3)$ et $\overrightarrow{u}=(4,5)$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Exercice 2
$E=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}$.
Montrer que U est combinaison linéaire de A, B et C.

Exercice 3
Soit $u=(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la donnée de U_0 et U_1 ainsi que par l'égalité $\forall n\in\mathbf{N}, U_{n+2}-5U_{n+1}+6U_n=0$.
Montrer que u est combinaison linéaire de deux suites géométriques.

III)Sous-espace vectoriel

Déf : soit E un espace vectoriel.
On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est une partie non-vide de E,
- $\forall\overrightarrow{u}\in F, \forall\overrightarrow{v}\in F, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\in F$ (*stabilité* de F pour « + »),
- $\forall\lambda\in\mathbf{R}, \forall\overrightarrow{u}\in F, \lambda.\overrightarrow{u}\in F$ (*stabilité* de F pour « . »).

Ou, ce qui est équivalent :

- F est une partie non-vide de E,
- $\forall\lambda\in\mathbf{R}, \forall\overrightarrow{u}\in F, \forall\overrightarrow{v}\in F, \lambda.\overrightarrow{u}+.\overrightarrow{v}\in F$ (*stabilité* de F par CL).

Propriété 1
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est lui-même un espace vectoriel et contient $\overrightarrow{0_E}$.

Exercice 4
$E=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $A\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $F=\{M\in E\mid AM=M\}$. Mq F est un sev de E.

IV)Sous-espace vectoriel engendré

Propriété 2
Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n}$ et noté $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$.

Déf : on a donc $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=\{\lambda_1.\overrightarrow{u_1}+...+\lambda_n.\overrightarrow{u_n},(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbf{R}^n\}$.

Propriété 3
Soit E un espace vectoriel, $n\in\mathbf{N}^*$ et $(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
1)Quels que soient les réels non nuls $a_1,...,a_n$: $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=\mathrm{Vect}(a_1\overrightarrow{u_1},...,a_n\overrightarrow{u_n})$.
2)Si $\overrightarrow{u_n}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_{n-1}}$: $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_n})=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},...,\overrightarrow{u_{n-1}})$.

Exercice 5
On donne $E=\mathbf{R}^3$ et $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid 2x-y+3z=0\big\}$.
Montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $F=Vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$.

V)Famille génératrice

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur u de E est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$.

Théorème 1
$(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une famille génératrice de $E \Longleftrightarrow \ E = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Exercice 6
On donne $E = \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a \\ c & 2c & a \\ b & b+c & b-c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

1)Montrer qu'il existe des matrices U_1, U_2 et U_3 telles que $F = Vect\,(U_1, U_2, U_3)$.

2)Que peut-on conclure pour F ? Que peut-on dire de la famille (U_1, U_2, U_3) ?

VI)Famille libre

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une *famille libre* si quels que soient les réels λ_1, ... , λ_n, on a l'implication :

$$\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

On dit que $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une famille liée de E si elle n'est pas libre, donc s'il existe des réels λ_1, ... , λ_n **non tous nuls** tels que $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$.

Déf : soit E un espace vectoriel, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou s'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}$.

Propriété 4
1)$(\overrightarrow{u})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
2)$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 7
On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{u_3} = (1,2,2)$, $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,2,1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (2,-4,-3)$.

1)Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est libre.

2)Montrer que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est liée, puis que $\overrightarrow{v_3}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Théorème 2
Une famille est liée si et seulement si il existe un vecteur de la famille qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

> Remarque
> Toute famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée.

VII)Base d'un espace vectoriel

Déf : soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une *base* de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$.

Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de réels tel que $\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + ... + \lambda_n.\overrightarrow{u_n}$
$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont appelées *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Déf : en reprenant les notations ci-dessus

$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée *vecteur colonne* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Propriété 5

Toute base de E reste une base de E si on change l'ordre des vecteurs de la base ou si l'on remplace l'un des vecteurs de la base par un vecteur qui lui est colinéaire.

Théorème 3

Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
$(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une base de E si et seulement elle est libre et génératrice pour E.

Exercice 8

On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-2, 0, 5)$, $\overrightarrow{u_3} = (-4, 4, 9)$.
Déterminer une base de $F = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

VIII)Dimension

Déf : on dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* s'il possède une base formée d'un nombre fini de vecteurs.

Propriété 6

Tout espace vectoriel E de dimension finie admet une multitude de bases. Toutes ces bases ont une caractéristique commune : elles ont le même nombre de vecteurs.

Déf : soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Le nombre de vecteurs de $\mathscr{B}$ est appelée *dimension* de E et notée $dim\ E$.

✓ On convient que $dim \left\{ \overrightarrow{0} \right\} = 0$.

Théorème 4

1)$dim\ \mathbf{R}^n = n$.
2)$dim\ \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}) = np$.
3)$dim\ \mathbf{R}_n\,[X] = n + 1$.

Théorème 5 (coïncidence cardinal/dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension connue n.
Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème 6 (plus rarement utilisé)

Soit E un espace vectoriel de dimension connue n.
1)Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.
2)Le cardinal d'une famille libre de E est toujours $\leq n$.
3)Le cardinal d'une famille génératrice de E est toujours $\geq n$.

Exercice 9

$\overrightarrow{u_1} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 3)$. Mq $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Propriété 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.
Alors, F est de dimension finie et $dim\ F \leq\ dim\ E$.

Propriété 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sev de E.
Si $F \subset G$ et si $dim\ F = dim\ G$, alors $F = G$.

IX)Base canonique

Les espaces vectoriels de dimension finie les plus courants possedent une base particulièrement simple, appelée *base canonique*.

Déf : pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\overrightarrow{e_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la ième qui est égale à 1.
La famille $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est appelée base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Déf : pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout entier $j \in [\![1, p]\!]$, on note e_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la ième ligne et la jième colonne qui vaut 1.
La famille (e_{ij}) est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

Déf : pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, on note $e_i = X^i$.
La famille $(e_0, e_1, ..., e_n)$ est appelée base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

X)Matrice de passage

Déf : soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n})$, une famille de n vecteurs de E.
On appelle *matrice de passage* de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e'_j}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 7
soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n})$, une famille de n vecteurs de E.
Alors, $\mathscr{B}'$ est une base de $E \Longleftrightarrow P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible .
Et on a alors : $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Théorème 8 (formule de changement de base pour les vecteurs colonnes)
Soit E un espace vectoriel. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de vecteurs colonnes U et U' dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a alors la formule :

$$U = PU' \text{ où } P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Exercice 10
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3})$ la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ définie par :
$\overrightarrow{e'_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{e'_2} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{e'_3} = (1, -1, 1)$.

1)Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2)Montrer que P est inversible et préciser son inverse. Que conclure pour $\mathscr{B}'$?

3)Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ dans $\mathscr{B}$, puis dans $\mathscr{B}'$.

Réponses :
1)$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2)$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$
3)$(1, 2, 3)$ et $\left(5, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

Exercice 11
Soit $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ où $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.
Soit $\mathscr{B}' = (e'_0, e'_1, e'_2)$ la famille de polynômes de $\mathbf{R}_2[X]$ définie par :
$e'_0 = X^2 + 2X$, $e'_1 = 2X^2 + X + 1$ et $e'_2 = 3X^2 - X + 2$.

1)Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2)Montrer que P est inversible et calculer son inverse. Que conclure pour $\mathscr{B}'$?

3)Déterminer les coordonnées de $u = X^2 - 3X + 4$ dans $\mathscr{B}$, puis dans $\mathscr{B}'$.

Réponses :
1)$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2)$P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
3)$(4, -3, 1)$ et $(-14, 18, -7)$.

XI)Rang d'une famille de vecteurs

Déf : soient $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle *rang* de la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, notée $rg\,(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, l'entier défini par :

$$rg\,(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}) = dim\text{Vect }(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}).$$

Propriété 9
Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est libre, son rang vaut n.
Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est liée, son rang est strictement inférieur à n.

Exercice 12
Soient $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, 1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 0, 1, 3)$ et $\overrightarrow{u_4} = (4, 1, 2, 5)$.
Quel est le rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$?

XII)Rang d'une matrice

Déf : soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
Soient $C_1, ..., C_p$ les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ relatives aux colonnes de A.
On appelle *rang* de la matrice A, notée $rg(A)$, l'entier défini par :

$$rg(A) = rg(C_1, ..., C_p).$$

Propriété 10
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Alors, $rg(A) = rg\,({}^tA)$.

Propriété 11
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors, A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Propriété 12
Le rang d'une matrice est invariant par les opérations de Gauss.

Exercice 13
Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.