Exercice 1 (eml 2019)

Partie A

1)a)Par définition, on a pour tout réel $t \geq 0$: $F_U(t) = P(U \leq t)$.
Donc $0 \leq F_U(t) \leq 1$.
En multipliant membre à membre par $f_V(t) \geq 0$, on déduit :
$\forall t \geq 0,\ 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.

1)b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)dt$ converge car f_V est une densité.
D'après le critère de comparaison sur les intégrales de fonctions positives,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)dt$ converge.

2)f_V est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_V(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)dt = 1$.
On déduit :

$$\begin{aligned}
P(U > V) &= 1 - P(U \leq V) \\
&= 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} f_V(t)dt - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \big(f_V(t) - F_U(t) f_V(t)\big)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big) f_V(t)dt.
\end{aligned}$$

3)a)$\forall t \geq 0,\ F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $f_V(t) = \mu e^{-\mu t}$.

3)b)De la question 2), on déduit :

$$\begin{aligned}
P(U > V) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt = 1$ puisque $t \mapsto (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t}$ est une densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda + \mu)$ sur $\mathbf{R}_+$.

Partie B

4)a)Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P(M_n > t) &= P(T_1 > t \cap ... \cap T_n > t) \\
&= P(T_1 > t) \cdots P(T_n > t) \text{ car } T_1, ..., T_n \text{ sont indépendantes} \\
&= P(T_1 > t)^n \text{ car } T_1, ..., T_n \text{ ont même loi} \\
&= \left(1 - F_{T_1}(t)\right)^n \\
&= \left(e^{-\lambda t}\right)^n \\
&= e^{-\lambda n t}.
\end{aligned}$$

4)b)$\forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i(\Omega) = \mathbf{R}_+$ donc $M_n(\Omega) = \mathbf{R}_+$.
On a donc $\forall t < 0,\ P(M_n \leq t) = 0$.
Par ailleurs, la question 4)a) donne $\forall t \geq 0,\ P(M_n \leq t) = 1 - e^{-n\lambda t}$.

On conclut que $F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

Donc $M_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$.

5)a)Comme il n'y a pas d'entier entre 0 et 1, les événements $(N = 1)$ et $(T_1 \leq T_0)$ sont égaux.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(N = 1) &= P(T_1 \leq T_0) \\
&= 1 - P(T_1 > T_0) \\
&= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \lambda} \text{ en utilisant 3)b) avec } U \to T_1 \text{ et } V \to T_0 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5)b)Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
\omega \in (N \leq n) &\iff N(\omega) \leq n \\
&\iff \exists k \in [\![1, n]\!] \mid T_k(\omega) \leq T_0(\omega) \\
&\iff min\,(T_1(\omega), ..., T_n(\omega)) \leq T_0(\omega) \\
&\iff M_n(\omega) \leq T_0(\omega) \\
&\iff \omega \in (M_n \leq T_0)\,.
\end{aligned}$$

Donc les événements $(N \leq n)$ et $(M_n \leq T_0)$ sont égaux.
Leurs contraires aussi donc $(N > n) = (M_n > T_0)$.

On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P(N > n) &= P(M_n > T_0) \\
&= \frac{\lambda}{n\lambda + \lambda} \text{ grâce à la question 3)b) avec } \mu \to \lambda \text{ et } \lambda \to n\lambda \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

5)c)Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $N > n-1 \Longleftrightarrow N = n$ ou $N > n$.

Cela entraîne que l'événement $(N > n-1)$ est la réunion des événements (incompatibles) $(N = n)$ et $(N > n)$.

Donc $P(N > n-1) = P(N = n) + P(N > n)$.

On déduit pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(N > n-1) - P(N > n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ grâce à } 5)b) \\ &= \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

5)d)$N(\Omega) = \mathbf{N}$ donc la famille $(N = k)_{k \in \mathbf{N}}$ est un système complet d'événements.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1$. De cette égalité, on tire :

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= 1 - P(N = 1) - \sum_{k=2}^{+\infty} P(N = k) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

6)Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$|nP(N = n)| = \left| n \times \frac{1}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} |nP(N = n)|$ diverge .

Ainsi, N n'admet pas d'espérance.

Exercice 2 (eml 2019)

Partie A

1)A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi, $sp(A) = \{1, 1/2, 2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

2)Cherchons les sous-espaces propres de A.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & + & z & = & 0 \\ & -\frac{1}{2} & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, y = 0, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{1/2}(A) &\iff \left(A - \frac{1}{2}I\right) U = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{1}{2} & x & - & y & + & & z & = & 0 \\ & & & & & \frac{3}{2} & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{1/2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = 2y, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$U \in E_2(A) \iff (A-2I)\,U = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} - & x & - & y & + & z & = 0 \\ & & - & \frac{3}{2}\, y & & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = z, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

A est diagonalisable donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A.

Les colonnes de P sont constituées des bases des sous-espaces propres rangées dans le même ordre que D.

Comme les valeurs propres doivent être rangées dans l'ordre croissant, cela impose de prendre :

$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3)On trouve : $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $QDQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D^{-1}$.

4)On a les équivalences suivantes :

$QDQ = D^{-1} \iff Q^{-1}QDQQ^{-1} = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1} \iff D = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1}(1)$

$A = PDP^{-1} \iff A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \iff D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \quad (2)$

On déduit :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= PQ^{-1}D^{-1}Q^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (1)} \\ &= PQ^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (2)} \\ &= PQP^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{car } Q^2 = I \iff Q^{-1} = Q \\ &= \left(PQ^{-1}P^{-1}\right)^{-1} A^{-1} \left(PQ^{-1}P^{-1}\right). \end{aligned}$$

Posons $R = PQ^{-1}P^{-1}$. On a alors : $A = R^{-1}A^{-1}R$ donc A et A^{-1} sont semblables.

Partie B

5)Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = e_1$,
$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,1) = e_3$,
$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,2) = -1e_2 + 2e_3$.
Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

L'opération de Gauss $L_2 \leftrightarrow L_3$ transforme M en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice inversible car triangulaire sans zéro sur la diagonale.

Donc M est inversible.

6)a)Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in Ker(f - Id) &\Longleftrightarrow (f - Id)(u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f(u) - Id(u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f(u) - u = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x, -z, y + 2z) - (x, y, z) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow (0, -z - y, y + z) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow y = -z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } Ker(f - Id) &= \{(x, y, z) \mid y = -z\} \\ &= \left\{(x, -z, z), (x, z) \in \mathbf{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,0,0) + z(0,-1,1), (x, z) \in \mathbf{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\,(u_1, -u_2) \\ &= \text{Vect}\,(u_1, u_2). \end{aligned}$$

(u_1, u_2) est une famille génératrice de $Ker(f - Id)$. Elle est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
Donc (u_1, u_2) est une base de $Ker(f - Id)$.

6)b)Posons $u_3 = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned} f(u_3) - u_3 = u_2 &\Longleftrightarrow (x, -z, y + 2z) - (x, y, z) = (0, 1, -1) \\ &\Longleftrightarrow (0, -z - y, y + z) = (0, 1, -1) \qquad . \\ &\Longleftrightarrow y + z = -1 \end{aligned}$$

On peut prendre par exemple : $x = 0$, $y = -1$ et $z = 0$, ce qui donne $u_3 = (0, -1, 0)$.

6)c)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff a(1,0,0) + b(0,1,-1) + c(0,-1,0) = (0,0,0) \\ &\iff (a, b-c, -b) = (0,0,0) \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}.$$

La famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

7)a)Comme u_1 et u_2 sont dans $Ker(f - Id)$, on a : $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.

Par ailleurs, $f(u_3) = u_2 + u_3$ d'après la question 6)b).

Donc $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$.

Donc $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7)b)M_1 et M_2 représentent la matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
Elles sont donc semblables.

On trouve $M_1 M_2 = I$.

8)M et M_1 représentent la matrice de f dans deux bases différentes.
Elles sont donc semblables.
Il existe donc une matrice P inversible telle que $M = P^{-1} M_1 P \quad (1)$

On déduit : $M^{-1} = P^{-1} M_1^{-1} P = P^{-1} M_2 P$, d'où $M_2 = P M^{-1} P^{-1} \quad (2)$

Par ailleurs, comme M_1 et M_2 sont semblables, il existe une matrice Q inversible telle que $M_1 = Q^{-1} M_2 Q \quad (3)$

De (1) et (3), on déduit : $M = P^{-1} Q^{-1} M_2 Q P$.

Puis, en utilisant (2) : $M = P^{-1} Q^{-1} P M^{-1} P^{-1} Q P = \left(P^{-1} Q P\right)^{-1} M^{-1} \left(P^{-1} Q P\right)$.

Posons $R = P^{-1} Q P$. On a alors : $M = R^{-1} M^{-1} R$.

Donc M et M^{-1} sont semblables.

Partie C

9)T est triangulaire et ses éléments diagonaux sont non nuls.
Donc T est inversible.

Supposons que T soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $T = PTP^{-1}$ (1)
T est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Donc 1 est l'unique valeur propre de T.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de T donc $D = I$.
En remplaçant dans (1), on a : $T = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Donc T n'est pas diagonalisable.

10)a)On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On déduit en développant :
$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 - N^3 = I_3$.

10)b)$N = T - I_3$ donc $I_3 + N = T$. La question 10)a) donne :
$T(I_3 - N + N^2) = I$.
Donc T est inversible et $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

11)a)N^2 est la matrice de gog dans la base canonique. Comme $N^2 \neq 0$, gog n'est pas l'endomorphisme nul.
Il existe donc un vecteur u de $\mathbf{R}^3$ tel que $gog(u) \neq 0$.
Puis, $N^3 = 0$ donc $gogog = 0$, ce qui entraîne que $gogog(u) = 0$.

11)b)Soient a, b et c des réels tels que $agog(u) + bg(u) + cu = 0$ $(*)$
En appliquant gog dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de gog, on obtient :
$ag^4(u) + bg^3(u) + cgog(u) = 0$, c'est-à-dire : $cgog(u) = 0$ puisque g^3 et g^4 sont les endomorphismes nuls.
Comme $gog(u) \neq 0$, on a donc $c = 0$.
En reportant dans $(*)$, on a : $agog(u) + bg(u) = 0$ $(**)$
En appliquant g dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de g, on obtient :
$ag^3(u) + bgog(u) = 0$, c'est-à-dire $bgog(u) = 0$, ce qui mène à $b = 0$.
En reportant dans $(**)$, on a : $agog(u) = 0$, ce qui donne $a = 0$.
Donc la famille $\mathscr{B}_3 = (gog(u), g(u), u)$ est libre. Elle est de cardinal 3 qui coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

11)c)$g\left(gog(u)\right) = g^3(u) = 0 = 0gog(u) + 0g(u) + 0u$,
$g(g(u)) = gog(u) = 1gog(u) + 0g(u) + 0u$,
$g(u) = 0gog(u) + 1g(u) + 0u$.

Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11)d)$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $N^2 - N = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_3}(g)$.
Par ailleurs, N est la matrice de g dans la base canonique.
$N^2 - N$ et N sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont donc semblables.

12)D'après la question 10)b), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N \quad (*)$

Comme $N^2 - N$ et N sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que $N^2 - N = P^{-1}NP$.

En remplaçant dans $(*)$, on déduit :

$T^{-1} = I_3 + P^{-1}NP = P^{-1}I_3P + P^{-1}NP = P^{-1}(I_3 + N)P = P^{-1}TP$.

Donc T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3 (eml 2019)

Partie A

1)f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et inverse de fonctions dérivables et pour tout $t>0$, on a : $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$.

$f'(t)\geq 0 \iff t-1\geq 0 \iff t\geq 1$.

Donc f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t=0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}=+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=+\infty$.

$\lim\limits_{t\to +\infty} t=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{1}{t}=0$. Par somme, $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)=+\infty$.

2)f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f\left([1,+\infty[\right)=[2,+\infty[$.

3)a)g a les mêmes variations que $f_{|[1,+\infty[}$.

t	2		$+\infty$
$g(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3)b)Comme f' ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$, on peut déduire que g est dérivable sur $f\left(]1,+\infty[\right)=]2,+\infty[$.

3)c)Soit $y\in[2,+\infty[$. Pour tout $t>0$, on a :

$f(t)=y \iff t+\dfrac{1}{t}=y \iff \dfrac{t^2+1}{t}=y \iff t^2+1=ty \iff t^2-ty+1=0.$

On obtient une équation du second degré d'inconnue t de paramètre y dont le discriminant vaut :

$\Delta=(-y)^2-4=y^2-4\geq 0$ car $y\geq 2$.

Les racines sont $t_1=\dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $t_2=\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$.

Comme $y \geq 2$, on a $t_1 \leq 1$ et $t_2 \geq 1$.

Or, $(f(t) = y \text{ et } t \geq 1) \iff t = g(y)$. Donc $g(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$.

Partie B

4)Les fonctions $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{y}$ sont de classe C^1 sur U comme inverse d'une fonction polynomiale.

Par somme, $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ est de classe C^1 sur U.

La fonction $(x, y) \mapsto (1 + x)(1 + y)$ est de classe C^1 sur U car polynomiale.

Par somme, h est de classe C^1 sur U. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$$\begin{aligned}
\partial_1 h(x, y) &= (1 + y)\partial_1 \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)\right] \\
&= (1 + y)\left[-\frac{1}{x^2}(1 + x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 1\right] \\
&= (1 + y)\left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] \\
&= (1 + y)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = h(y, x)$, on a pour des raisons de symétrie :

$\partial_2 h(x, y) = (1 + x)\left(-\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x}\right)$.

5)Soit $(x, y) \in U$. On a alors $x > 0$ et $y > 0$.

(x, y) est un point critique de h

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 h(x, y) & = & 0 \\ \partial_2 h(x, y) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} (1 + y)\left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y}\right) & = & 0 \\ \\ (1 + x)\left(-\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} & = & 0 \text{ car } 1 + y \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x} & = & 0 \text{ car } 1 + x \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{array}\right.$$

6)Pour tout $(x,y) \in U$, on a :

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x^2 \\ x &= \left(x^2\right)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x^2 \\ x &= x^4 \end{cases}$$

Or, $x = x^4 \iff x - x^4 = 0 \iff x(1-x^3) = 0 \iff 1 - x^3 = 0$
$\iff x^3 = 1 \iff x = 1$ (car la fonction cube est bijective).

En reportant cette valeur de x dans le système, on obtient $y = 1$.

Ainsi, h admet sur U l'unique point critique $(1,1)$.

7)a)Pour tout $(x,y) \in U$, on a :

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y}\right)(1+y) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x \\ &= 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

7)b)Pour tout $(x,y) \in U$, on a :

$$h(x,y) - h(1,1) = h(x,y) - 8 = f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) - 6 \quad (*)$$

Or, d'après le tableau de variations de f, on a : $\forall t > 0, f(t) \geq 2$.

Comme pour tout $(x,y) \in U$, on a $x > 0$, $y > 0$ et $\dfrac{x}{y} > 0$, on peut déduire que $f(x) \geq 2$, $f(y) \geq 2$ et $f\left(\dfrac{x}{y}\right) \geq 2$.

De $(*)$, on déduit alors que $h(x,y) - h(1,1) \geq 2 + 2 + 2 - 6$, c'est-à-dire $h(x,y) - h(1,1) \geq 0$, ce qui prouve que h admet en (1,1) un minimum global sur U.

Partie C

8)Montrons ce résultat par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\ll$ u_n existe et $u_n \geq 1$ $\gg$.

u_1 existe et $u_1 = 1 \geq 1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe donc nu_n existe. De plus, $u_n \geq 1$ donc $nu_n \geq n > 0$. Donc $nu_n \in D_f$. C'est pourquoi $f(nu_n)$ existe et qu'ainsi u_{n+1} existe.

De plus, comme $u_n \geq 1 > 0$, on a $u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

9)programme :

```
def suite(n):
    u=1
    for k in range(1,n):
        u=u+1/(k**2*u)
    return u
```

10)a)$\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$.

De plus, $u_n \geq 1$ donc $n^2 u_n \geq n^2$, puis $\dfrac{1}{n^2 u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$, d'où $v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

10)b)La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

10)c)Pour tout entier $n \geq 2$, on a par télescopage :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1.$

On déduit $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ existe et est finie.

La suite (u_n) est donc convergente.

11)a)La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1,k]$.

Donc $\forall t \in [k-1,k]\,, \varphi(k) \leq \varphi(t)$, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

En intégrant entre les bornes croissantes $k-1$ et k, on obtient :
$\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{k^2}\big(k-(k-1)\big) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Ainsi, $\forall k \geq 2, \dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

11)b)Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, on a par télescopage :
$\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_p$.

Les questions 10)a) et 11)a) donnent par recollement des inégalités :
$\forall k \geq 2,\ 0 \leq v_k \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.
En sommant ces inégalités pour k allant de p à $n-1$, on a :
$0 \leq \displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, puis grâce à la relation de Chasles :
$0 \leq u_n - u_p \leq \displaystyle\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

11)c)L'égalité ci-dessus donne pour $p = 2$ et tout entier $n \geq 3$:
$0 \leq u_n - u_2 \leq \displaystyle\int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.
Or, $\displaystyle\int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1$.
Donc $0 \leq u_n - u_2 \leq 1$, puis $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Par ailleurs, $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{u_1} = 2$.
Donc pour tout entier $n \geq 2$, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.
Par passage à la limite, on déduit : $2 \leq l \leq 3$.

11)d)En reprenant l'encadrement de la question 11)b), on obtient en calculant l'intégrale :
$0 \leq u_n - u_p \leq \left[-\dfrac{1}{t}\right]_{p-1}^{n-1} = -\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{p-1}$.
D'où $0 \leq u_n - u_p \leq \dfrac{1}{p-1}$.
Par passage à la limite, on déduit : $0 \leq l - u_p \leq \dfrac{1}{p-1}$.

11)e)programme :
```
def limite():
    u=2
    p=2
    while 1/(p-1)>10**-4:
        u=u+1/(p**2*u)
        p=p+1
    return u
```