EML 2015

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx, \int_0^{+\infty} xe^{\lambda x}dx.$$

3. (a) soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\dfrac{1}{\lambda}ln(1-U)$?

   (b) En Python, la fonction *random()* du module *numpy.random* renvoie un réel aléatoire de $[0, 1]$.
   A l'aide de la question 3)a), écrire une fonction Python d'en-tête *def expo(L) :*
   prenant comme paramètre un réel L strictement positif et renvoyant la valeur d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre L.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0, \\ \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \geq 0$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

   (b) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1 et l'espérance $E(T_2)$ de T_2.

6. (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1}f'_{n+1}(x)$.

   (b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$. En déduire la probabilité $P(N = 0)$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.
9. Déterminer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier que $P(Z \leq a) = 0$.
11. Soit $x \in]a, +\infty[$
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

    $$(N = n) \cap (Z \leq x) = \begin{cases} \big(a < X_1 \leq X\big) & \text{si } n = 1 \\ \\ (T_{n-1} \leq a) \cap \big(a < X_n \leq x\big) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

    En déduire la probabilité $P\big((N = n) \cap (Z \leq x)\big)$.

    (b) Montrer alors que $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$.
12. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
    (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Etude d'une fontion

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x^2 e^x - 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de φ. Préciser la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

   On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 e^x.$$

   On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}\right| \leq \dfrac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur U définie par

$$\forall (x, y) \in U,\ g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.
10. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).
11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?
13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?
14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

EXERCICE 3

Certaines questions ont été supprimées car hors programme.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E.
On a donc $i : x \longmapsto x$ et $\theta : x \longmapsto 0_E$.

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, f^2 + i \neq \theta \text{ et } f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. (a) Montrer que f n'est pas bijectif.
   (b) En déduire qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.
   Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.
2. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.
   Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.
3. Montrer que $f(v_3) = -v_2$.
4. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.
   On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :
   $$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$
5. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.
6. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$.
7. (a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.
   (b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
8. On note $g = f^2 - i$.
   Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.