

---

**Exercice 1 (eml 2018)**

1)a) La première colonne de  $A$  donne  $f(e_1) = -2e_2 + 1e_3$ .

Donc  $v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1)$ .

1)b) Pour tous réels  $a, b$  et  $c$ , on a :

$$a.u + b.v + c.e_1 = 0 \iff a.(1, -1, 0) + b.(1, -2, 1) + c.(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Donc la famille  $(u, v, e_1)$  est libre.

C'est une famille libre de  $\mathbf{R}^3$  dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de  $\mathbf{R}^3$ . C'est donc une base de  $\mathbf{R}^3$ .

1)c)  $u = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3$ ,  $v = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3$  et  $e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$ .

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer  $P^{-1}$ , on applique la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)a)  $A$  et  $A'$  sont les matrices respectives de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .  
 $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

La formule de changement de base donne alors :  $A' = P^{-1}AP$ .

b)  $A' = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) D'après la question 2)a), les matrices  $A$  et  $A'$  sont semblables, elles ont donc les mêmes valeurs propres.

$A'$  est triangulaire, ses valeurs propres sont donc  $-1$  et  $2$ .

Ainsi,  $sp(A) = \{-1, 2\}$ .

d) •  $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A + I)U = 0\}$ . Posons  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} (A + I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 & L_1 \\ -2x + y + 4z = 0 & L_2 \\ x + y + z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 & L_1 \\ -3y - 6z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ -3y - 6z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_{-1}(A)$  et elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de  $E_{-1}(A)$ .

•  $E_2(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$ . Posons  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} (A - 2I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x - 2y - 5z = 0 & L_1 \\ -2x - 2y + 4z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x - 2y - 5z = 0 & L_1 \\ 9z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_2(A)$  et elle est libre car formée

d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de  $E_2(A)$ .

•  $\dim E_{-1}(A) + \dim E_2(A) = 1 + 1 = 2 < 3$ , alors que  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

D'après le théorème de réduction,  $A$  n'est pas diagonalisable.

e) 0 n'est pas valeur propre de  $A$  donc  $A$  est inversible. Donc  $f$  est bijectif.

$$3) \text{a) } g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 0, -1) = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3,$$

$$g(e_2) = g(0, 1, 0) = (1, 2, 1) = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3,$$

$$g(e_3) = g(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) = -1e_1 + 0e_2 + 1e_3.$$

$$\text{Donc } B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On trouve immédiatement  $B^2 = 2B$ .

c) • L'égalité précédente s'écrit :  $B^2 - 2B = 0$ , c'est-à-dire  $P(B) = 0$  où  $P(X) = X^2 - 2X$ .

$P$  est donc un polynôme annulateur de  $B$ .

Les racines de  $P$  sont 0 et 2. Donc  $sp(B) \subset \{0, 2\}$ .

•  $E_0(B) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid BU = 0\}$ . Posons  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$BU = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = 0 \text{ et } x = z$$

$$\text{Donc } E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_0(B)$  (même raisonnement que pour  $A$ ).

$$\bullet E_2(B) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (B - 2I)U = 0\}. \text{ Posons } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(B - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff -x + y - z = 0$$

$$\iff y = x + z.$$

$$\text{Donc } E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix}, (x, z) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $E_2(B)$  et elle est libre

car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $E_2(B)$ .

d)  $\dim E_0(B) + \dim E_2(B) = 1 + 2 = 3$  et  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

D'après le théorème de réduction,  $B$  est diagonalisable.

4)a)  $\bullet \mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

$\bullet \mathcal{E}$  est non vide car la matrice nulle est dans  $\mathcal{E}$  puisque  $B0 = 0A$ .

$\bullet$  Soient  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\lambda$  un réel.

$$B(\lambda M + N) = \lambda BM + BN$$

$$= \lambda MA + NA \quad \text{car } M \in \mathcal{E} \text{ et } N \in \mathcal{E}$$

$$= (\lambda M + N)A.$$

Donc  $\lambda M + N \in \mathcal{E}$ .

$\mathcal{E}$  est une partie non vide de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  donc un espace vectoriel.

---

4)b) Soit  $M \in \mathcal{E}$ . Supposons  $M$  inversible.

L'égalité  $BM = MA$  donne alors  $BMM^{-1} = MAM^{-1}$ , c'est-à-dire  $B = MAM^{-1}$ .

$A$  est inversible (puisque  $f$  est bijectif) ainsi que  $M$  et  $M^{-1}$ .

Par produit,  $MAM^{-1}$  est inversible. Donc  $B$  est inversible.

C'est absurde car 0 est valeur propre de  $g$  donc de  $B$ .

Aucune matrice de  $\mathcal{E}$  n'est donc inversible.

$$\begin{aligned} 5)a) {}^t(A - \lambda I) &= {}^tA - \lambda {}^tI \quad \text{par linéarité de la trace} \\ &= {}^tA - \lambda I \quad \text{car } I \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Une matrice et sa transposée ayant même rang, on a donc :

$$rg(A - \lambda I) = rg({}^tA - \lambda I).$$

5)b) La question précédente entraîne que  $A - \lambda I$  n'est pas inversible si et seulement si  ${}^tA - \lambda I$  n'est pas inversible.

Ainsi,  $A$  et  ${}^tA$  ont les mêmes valeurs propres.

$$\text{Donc } sp({}^tA) = sp(A) = \{-1, 2\}.$$

$$\text{En outre, } sp(B) = \{0, 2\}.$$

$B$  et  ${}^tA$  ont donc comme seule valeur propre commune  $\alpha = 2$ .

$$5)c) \text{ Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ un vecteur propre de } B \text{ associé à } 2.$$

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ un vecteur propre de } {}^tA \text{ associé à } 2.$$

$$\text{Alors, } N = X {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

$X$  et  $Y$  étant des vecteurs propres, ils sont non nuls. Il existe donc  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  tels que  $x_i \neq 0$  et  $y_j \neq 0$ .

Alors,  $x_i y_j \neq 0$ , ce qui prouve que l'un des coefficients de  $N$  n'est pas nul donc que  $N$  est non nulle.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } BN &= B X {}^tY \\ &= 2 X {}^tY \\ &= X {}^t(2Y) \\ &= X {}^t({}^tA Y) \\ &= X {}^t Y {}^t({}^tA) \\ &= X {}^t Y A \\ &= NA. \end{aligned}$$

Donc  $N \in \mathcal{E}$ .

---

$$5)d) {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis } {}^tA - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On voit que  $({}^tA - 2I)Y = 0$  donc  $Y$  est vecteur propre de  ${}^tA$  associé à 2.

Par ailleurs, on a vu dans la question 3)c) que  $E_2(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Posons  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , vecteurs propres de  $B$  associés à 2.

Posons  $N_1 = X_1 {}^tY$  et  $N_2 = X_2 {}^tY$ .

$$\text{On trouve } N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente,  $N_1$  et  $N_2$  sont des éléments non nuls de  $\mathcal{E}$ .

$(N_1, N_2)$  est une famille libre car  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas colinéaires.

C'est aussi une famille génératrice de  $\text{Vect}(N_1, N_2)$ .

Donc  $(N_1, N_2)$  est une base de  $\text{Vect}(N_1, N_2)$ .

Donc la dimension de  $\text{Vect}(N_1, N_2)$  vaut 2.

Or,  $\text{Vect}(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$ . Donc  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ .

---

**Exercice 2 (eml 2018)**

**Partie I**

1)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Par différence,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on écrit :  $f(x) = x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  par croissances comparées donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ . Par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2)  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, 1[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]1, +\infty[$ .

$2 \in ]1, +\infty[$  admet donc un unique antécédent  $a \in ]0, 1[$  par  $f$ .

De même,  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$ .

$2 \in ]1, +\infty[$  admet donc un unique antécédent  $b \in ]1, +\infty[$  par  $f$ .

Enfin,  $f(1) = 1 \neq 2$ .

L'équation  $f(x) = 2$  admet donc deux solutions, l'une est  $a \in ]0, 1[$ , l'autre est  $b \in ]1, +\infty[$ .

3)  $f(2) = 2 - \ln 2 \approx 1,3$

$f(4) = 4 - \ln 4 = 4 - 2 \ln 2 \approx 2,6$

$f(b) = 2$ .

Donc  $f(2) \leq f(b) \leq f(4)$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $[2, 4]$ , on déduit que  $2 \leq b \leq 4$ .

---

## Partie II

4) Montrons par récurrence que  $\mathcal{P}(n) : \ll U_n \text{ existe et } U_n \geq b \gg$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Par énoncé,  $U_0 \geq 4$  et  $b \leq 4$  donc  $U_0$  existe et  $U_0 \geq b$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :  $U_n \geq b > 0$  donc  $U_n > 0$ .

Ainsi,  $U_n \in D_f$  donc  $f(U_n)$  existe, c'est-à-dire  $U_{n+1}$  existe.

De  $U_n \geq b$ , on déduit par croissance du logarithme que  $\ln U_n \geq \ln b$ , puis  $\ln U_{n+1} \geq \ln b + 2$ , c'est-à-dire  $U_{n+1} \geq \ln b + 2$  (\*)

Or,  $f(b) = 0$  donne  $b - \ln b = 2$ , soit  $\ln b + 2 = b$ .

En reportant dans (\*), on a :  $U_{n+1} \geq b$ .

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On conclut que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $U_n$  existe et  $U_n \geq b$ .

5) Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$ .

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition :  $\ll U_{n+1} \leq U_n \gg$ .

$\mathcal{P}(0)$  s'écrit :  $\ll U_1 \leq U_0 \gg$ .

Or,  $U_0 = 4$  et  $U_1 = \ln U_0 + 2 = \ln 4 + 2 = 2 \ln 2 + 2 \approx 3,4$ . Donc  $U_1 \leq U_0$ .

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a  $U_{n+1} \leq U_n$ .

Par croissance du logarithme, on déduit :

$\ln U_{n+1} \leq \ln U_n$ , puis  $\ln U_{n+1} + 2 \leq \ln U_n + 2$ , c'est-à-dire :  $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ .

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On conclut que  $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$ , ce qui prouve que la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

$(U_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée par  $b$  donc convergente vers  $L$ .

Par passage à la limite, on a :  $L \geq b$ .

La fonction  $g : x \mapsto \ln x + 2$  est continue sur  $]0, +\infty[$  donc en  $L$ .

De plus, on a  $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = g(U_n)$ .

D'après le théorème du point fixe,  $L$  est un point fixe de  $g$  donc est solution de l'équation  $g(x) = x$ .

Or,  $g(x) = x \iff \ln x + 2 = x \iff f(x) = 2 \iff x = a$  ou  $x = b$ .

On ne peut pas avoir  $L = a$  car  $L \geq b$  donc  $L = b$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = b$ .

6)a)  $g : x \mapsto \ln x + 2$  est dérivable sur  $[b, +\infty[$  et  $\forall x \geq b, g'(x) = \frac{1}{x}$ .

$\forall x \geq b, g'(x) \leq \frac{1}{b}$  et comme  $b \geq 2$ , on déduit que  $\forall x \geq b, g'(x) \leq \frac{1}{2}$ .

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout réel  $a \geq b$ , on a :

$$g(a) - g(b) \leq \frac{1}{2}(a - b).$$

---

Comme  $U_n \geq b$ , il est licite de prendre  $a = U_n$ , on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, g(U_n) - g(b) \leq \frac{1}{2}(U_n - b).$$

Or,  $g(U_n) = U_{n+1}$  et  $g(b) = b$  donc  $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(U_n - b)$ .

6)b) On sait déjà que  $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq b$  donc  $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b$ .

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition :  $\ll U_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}} \gg$ .

$\mathcal{P}(0)$  s'écrit :  $\ll U_0 - b \leq \frac{1}{2^{-1}} \gg$ .

Or,  $U_0 - b \leq \frac{1}{2^{-1}} \iff 4 - b \leq 2 \iff b \geq 2$ , ce qui est vrai.

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :  $U_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

En multipliant membre à membre par  $\frac{1}{2}$ , on obtient :  $\frac{1}{2}(U_n - b) \leq \frac{1}{2^n}$ .

Or,  $U_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(U_n - b)$ .

En recollant les inégalités, on a :  $U_{n+1} - b \leq \frac{1}{2^n}$ . Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On conclut que  $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

7)a) programme :

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=4
    for k in range(n):
        u=np.log(u)+2
    return u
```

7)b) On sait que la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et converge vers  $b$ .

Dès que  $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \epsilon$ , on a  $U_n - b \leq \epsilon$  et  $U_n$  est alors une valeur approchée de  $b$  à epsilon près, d'où le programme suivant :

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=1
    while 1/2**(n-1)>epsilon:
        n=n+1
    return(suite(n))
```

### Partie III

8) La fonction  $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a aussi  $2x > 0$ . Donc  $\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$  existe.

$t \mapsto \frac{1}{f(t)}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  donc admet sur  $]0, +\infty[$  une primitive  $G$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a alors :  $\phi(x) = G(2x) - G(x)$ .

$\phi$  est dérivable par différence et composée de fonctions dérivables et pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2 \times \frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \\ &= \frac{2(x - \ln x) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{\ln(2x) - 2 \ln x}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{\ln 2 + \ln x - 2 \ln x}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{\ln 2 - \ln x}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))}. \end{aligned}$$

9) On sait que  $\forall x > 0, f(x) > 0$  donc  $\forall x > 0, x - \ln x > 0$ .

On a également  $\forall x > 0, f(2x) > 0$  donc  $\forall x > 0, 2x - \ln(2x) > 0$ .

Donc  $\phi'(x) \geq 0 \iff \ln 2 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \ln 2 \iff x \leq 2$ .

$x$	0	2	$+\infty$
$\phi'(x)$	+	0	-
$\phi(x)$			

10) Soit  $x > 0$ .

$\forall t \in [x, 2x], f(t) \geq 1$  donc  $\forall t \in [x, 2x], 0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$ .

Par croissance de l'intégrale ( $x \leq 2x$ ), on a :  $0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \leq \int_x^{2x} 1 dt$ .

Or,  $\int_x^{2x} 1 dt = (2x - x) \times 1 = x$ .

Donc  $\forall x > 0, 0 \leq \phi(x) \leq x$ .

11)a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ . D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = 0$ .

Cette limite est finie donc  $\phi$  est prolongeable par continuité en 0.

On pose alors  $\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = 0$ .

11)b) Quand  $x \rightarrow 0^+$ , on a :  $\ln 2 - \ln x \sim -\ln x$ .

En effet,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2 - \ln x}{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln 2}{\ln x} + 1 = 1$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

De même, quand  $x \rightarrow 0^+$ , on a :  $x - \ln x \sim -\ln x$  et  $2x - \ln(2x) \sim -\ln(2x)$ .

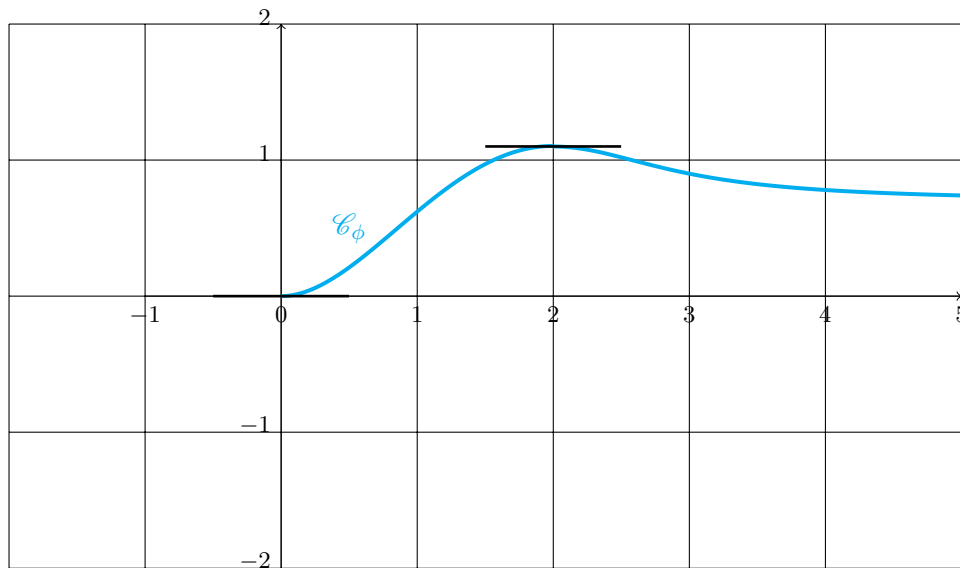
Par quotient, quand  $x \rightarrow 0^+$ , on a :  $\phi'(x) \sim -\frac{1}{\ln(2x)}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln(2x)} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi'(x) = 0$ .

12) La tangente à  $\mathcal{C}_\phi$  en 0 a pour équation  $y = \phi'(0)x + \phi(0)$ .

Or,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(0) = 0$ .

Donc cette tangente a pour équation  $y = 0$ .



---

## Partie IV

13)a)  $\forall (x, y) \in U, \partial_1 H(x, y) = x - y - 2$  et  $\partial_2 H(x, y) = -x + e^y$ .

13)b) Les points critiques de  $H$  sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \partial_1 H(x, y) = 0 \\ \partial_2 H(x, y) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + e^y = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ e^y = x \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - \ln x - 2 = 0 \\ y = \ln x \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} f(x) = 2 \\ y = \ln x \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = a \text{ ou } x = b \\ y = \ln x \end{cases} \end{aligned}$$

Les points critiques de  $H$  sont  $(a, \ln a)$  et  $(b, \ln b)$ .

14)a)  $\partial_{1,1} H(x, y) = 1, \partial_{1,2} H(x, y) = \partial_{2,1} H(x, y) = -1, \partial_{2,2} H(x, y) = e^y$ .

$$\text{Donc } \nabla^2 H(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}.$$

$$\text{On déduit } M_a = \nabla^2 H(a, \ln a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

14)b)  $\lambda$  est valeur propre de  $M_a$

$$\iff M_a - \lambda I \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & a - \lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff (1 - \lambda)(a - \lambda) - 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - (a + 1)\lambda + a - 1 = 0.$$

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $M_a$  sont donc les racines du polynôme  $X^2 - (a + 1)X + a - 1$ .

On a donc  $X^2 - (a + 1)X + a - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ , ce qui donne en développant le membre de droite :

$$X^2 - (a + 1)X + a - 1 = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2.$$

$$\text{En identifiant, on obtient : } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = a - 1 \end{cases}$$

14)c) Comme  $a < 1$ , on a  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ . Donc  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes contraires.  $H$  ne présente pas d'extrémum local en  $(a, \ln a)$ . C'est un point selle.

---

15) Notons  $M_b$  la matrice hessienne de  $H$  au point  $(b, \ln b)$ .

En faisant le même raisonnement, les valeurs propres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $M_b$  vérifient :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = b + 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 = b - 1 \end{cases}$$

Comme  $b > 1$ , on a  $\gamma_1 \gamma_2 > 0$ . Donc  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont de même signe.

Comme de plus,  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ , on a finalement  $\gamma_1 > 0$  et  $\gamma_2 > 0$ .

Ainsi,  $H$  présente en  $(b, \ln b)$  un minimum local.

---

**Exercice 3 (eml 2018)**

Dans tout l'exercice, introduisons pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  les événements :  
 $P_k = \ll \text{le } k\text{-ième lancer fait pile} \gg$  et  $F_k = \ll \text{le } k\text{-ième lancer fait face} \gg$ .

**Partie I**

$$1)a)(X = 0) = (P_1 \cap P_2)$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(P_1 \cap P_2) \\ &= P(P_1)P(P_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$(X = 1) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

$$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$$

Avec les mêmes arguments d'incompatibilité, puis d'indépendance, on déduit :

$$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

b) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , l'événement  $(X = n)$  est la réunion des  $n + 1$  événements incompatibles suivants qu'on obtient en déplaçant le premier pile (pouvant prendre  $n + 1$  positions) :

$$P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2},$$

$$F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2},$$

etc...

$$F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2},$$

$$F_1 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}.$$

Chacun de ces événements possède exactement 2 pile et  $n$  face.

$$\text{Par indépendance, leur probabilité vaut : } \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^{n+2}}.$$

Puis, par incompatibilité, ces  $n + 1$  probabilités s'ajoutent.

$$\text{Donc } P(X = n) = (n + 1) \times \frac{4}{3^{n+2}}, \text{ égalité qui reste vraie pour } n = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbf{N}, P(X = n) = (n + 1) \times \frac{4}{3^{n+2}}.$$

---

## Partie II

2)a) Lorsque  $X = n$ , alors  $U$  prend toutes les valeurs entre 0 et  $n$ .

Comme  $n$  peut prendre toutes les valeurs entières, on a :

$$U(\Omega) = \{[0, n], n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}.$$

b) Il s'agit de déterminer  $P_{(X=n)}(U = k)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $k \in \mathbf{N}$ .

•  $k > n$

Comme l'urne contient les boules numérotées  $[0], [1], \dots, [n]$  et que  $k > n$ , il est impossible de tirer une boule numérotée  $[k]$ .

Donc  $P_{(X=n)}(U = k) = 0$ .

•  $k \leq n$

Cette fois-ci, la boule numérotée  $[k]$  figure dans la liste des boules de l'urne. Il y a  $n+1$  boules dans cette urne, la probabilité de tirer la boule numérotée

$[k]$  est donc  $\frac{1}{n+1}$ .

Ainsi,  $P_{(X=n)}(U = k) = \frac{1}{n+1}$ .

$$\text{Finalement, } P_{(X=n)}(U = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

c) Soit  $k \in \mathbf{N}$ .

La formule des probabilités totales pour le sce  $(X = n)_{n \in \mathbf{N}}$  donne :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \times P(X = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{d'après II)2)b)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n). \end{aligned}$$

Puis, grâce à la question I)1)b) :

---


$$\begin{aligned}
P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{4}{3^{i+k+2}} \quad \text{en posant } i = n - k \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}.
\end{aligned}$$

d) •  $U$  admet une espérance ssi la série  $\sum_{k \geq 0} |kP(U = k)|$  converge.

$$\text{Or, } \forall k \in \mathbf{N}, |kP(U = k)| = \frac{2k}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

La série  $\sum_{k \geq 0} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$  converge (série dérivée première dont le paramètre appartient à  $] -1, 1[$ ).

Donc la série  $\sum_{k \geq 0} |kP(U = k)|$  converge.

Donc  $U$  admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

• D'après le théorème de transfert,  $U(U - 1)$  admet une espérance ssi la série  $\sum_{k \geq 0} |k(k - 1)P(U = k)|$  converge.

$$\text{Or, } \forall k \in \mathbf{N}, |k(k - 1)P(U = k)| = \frac{2k(k - 1)}{3^{k+1}} = \frac{2}{27} \times k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$$

La série  $\sum_{k \geq 0} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$  converge (série dérivée seconde dont le paramètre appartient à  $] - 1, 1[$ ).

Donc la série  $\sum_{k \geq 0} |k(k - 1)P(U = k)|$  converge.

Donc  $U(U - 1)$  admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(U(U - 1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k - 1)P(U = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{27} \times k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \sum_{k=0}^{+\infty} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme  $U$  et  $U(U - 1)$  admettent une espérance, alors  $U^2$  admet une espérance donnée par :

$$E(U^2) = E(U(U - 1) + U) = E(U(U - 1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Enfin, d'après la formule de Koëning,  $U$  admet une variance donnée par :

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

3)a) Lorsque  $X = n$ , alors  $U$  peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et  $n$ .

On déduit :

$$V(\Omega) = \{n - k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket, n \in \mathbf{N}\} = \{j \in \llbracket 0, n \rrbracket, n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}.$$

b) Il s'agit de déterminer  $P_{(X=n)}(V = k)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $k \in \mathbf{N}$ .

•  $k > n$

$$\begin{aligned} P_{(X=n)}(V = k) &= P_{(X=n)}(X - U = k) = P_{(X=n)}(n - U = k) \\ &= P_{(X=n)}(U = n - k) = 0 \text{ car } n - k < 0 \text{ et } U(\Omega) = \mathbf{N}. \end{aligned}$$

- $k \leq n$

En reprenant les calculs ci-dessus, on a :

$$P_{(X=n)}(V = k) = P_{(X=n)}(U = n - k) = \frac{1}{n + 1}.$$

$$\text{Finalement, } P_{(X=n)}(V = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{1}{n + 1} & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

c) Par le même raisonnement que pour la question 2)c), on obtient :

$$\forall k \in \mathbf{N}, P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

✓  $U$  et  $V$  ont donc même loi.

4) Pour tout couple  $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} P(U = i \cap V = j) &= P((U = i) \cap (X - U = j)) \\ &= P((U = i) \cap (X - i = j)) \\ &= P((U = i) \cap (X = i + j)) \\ &= P_{(X=i+j)}(U = i)P(X = i + j) \\ &= \frac{1}{i + j + 1} \times (i + j + 1) \times \frac{4}{3^{i+j+2}} \quad \text{grâce à 1)b) et 2)b)} \\ &= \frac{2}{3^{i+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} \\ &= P(U = i)P(V = j). \end{aligned}$$

Donc  $U$  et  $V$  sont indépendantes.

5) Comme  $U$  et  $V$  sont indépendantes, on a :  $cov(U, V) = 0$ .

On déduit :

$$\begin{aligned} cov(X, U) &= cov(U + V, U) \\ &= cov(U, U) + cov(V, U) \quad \text{par bilinéarité} \\ &= cov(U, U) + cov(U, V) \quad \text{par symétrie} \\ &= V(U) + cov(U, V) \\ &= \frac{3}{4} + 0 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

---

### Partie III

6)a)programme :

```
import numpy.random as rd
def simule_X():
    pile=0
    face=0
    while pile<2:
        x=rd.random()
        if x<2/3:
            pile=pile+1
        else:
            face=face+1
    return(face)
```

b)programme :

```
def mystere(p):
    r=0
    N=10**4
    for k in range(N):
        x=simule_X()
        y=simule_Y(p)
        if x<=y:
            r=r+1/N
    return r
```

#### Explications :

On effectue le jeu 10000 fois.

Pour chaque jeu, on teste si  $x \leq y$ , c'est-à-dire si le joueur A gagne le jeu.

Si c'est le cas, on augmente  $r$  de  $1/N$ .

$r$  étant initialement égal à 0 et augmentant de  $1/N$  à chaque gain du joueur A, sa valeur au bout de 10000 parties correspond à la fréquence de gain du joueur A.

c)Pour que le jeu soit équilibré, il faut que la probabilité que A gagne vale  $1/2$ , ce qui correspond graphiquement à la valeur  $p = 0,8$ .

7)a)Pour le joueur B, l'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre de lancers successifs et indépendants.

A chaque lancer, la probabilité de succès (=faire pile) vaut  $p$ .

$Z$  représente le rang d'obtention du premier succès.

Donc  $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

Le cours donne :  $E(Z) = \frac{1}{p}$  et  $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$ .

---

b)  $Y = Z - 1$ .

Comme  $Z$  admet une espérance et que  $Y$  est une fonction affine de  $Z$ , alors  $Y$  admet une espérance donnée par :

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 \text{ par linéarité. D'où } E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$

Comme  $Z$  admet une variance et que  $Y$  est une fonction affine de  $Z$ , alors  $Y$  admet une variance donnée par :

$$V(Y) = V(Z - 1) = 1^2 V(Z) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\ &= P(Z \geq n + 1) \\ &= 1 - P(Z \leq n) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n P(Z = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p \\ &= 1 - p \times \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j \quad \text{en posant } j = k - 1 \\ &= 1 - p \times \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} \\ &= 1 - p \times \frac{1 - (1-p)^n}{p} \\ &= 1 - (1 - (1-p)^n) \\ &= (1-p)^n. \end{aligned}$$

8)a) La formule des probabilités totales pour le sce  $(X = n)_{n \in \mathbf{N}}$  donne :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (X \leq Y)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (n \leq Y)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y \geq n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y. \end{aligned}$$

b) De 7)b) et 8)a), on déduit :

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{4}{3^{k+1}} \times (1-p)^{k-1} \quad \text{en posant } k = n+1 \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3^{k-1}} \times (1-p)^{k-1} \\
 &= \frac{4}{9} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \frac{1-p}{3} \right)^{k-1} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\frac{(2+p)^2}{9}} \\
 &= \frac{4}{(2+p)^2}.
 \end{aligned}$$

c) Le jeu est équilibré si  $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) = \frac{1}{2} &\iff \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
 &\iff (2+p)^2 = 8 \\
 &\iff 2+p = \sqrt{8} \text{ ou } 2+p = -\sqrt{8} \\
 &\iff p = \sqrt{8} - 2 \text{ ou } \underbrace{p = -\sqrt{8} - 2}_{\text{impossible car négatif}}
 \end{aligned}$$

En conclusion, le jeu est équilibré ssi  $p = \sqrt{8} - 2$ .

$$\begin{aligned}
 \checkmark \sqrt{8} - 2 &= 2\sqrt{2} - 2 \approx 2 \times 1,4 - 2 \approx 0,8. \\
 \text{On retrouve la valeur conjecturée en 6)c).}
 \end{aligned}$$