DM8 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1 :

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

A matrice dont les éléments diagonaux valent $-n$, les autres valant tous 1,

J matrice dont tous les éléments sont égaux à 1,

I matrice identité.

1)Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J, puis faire de même pour A^2.

2)En déduire un polynôme annulateur de A, puis trouver les valeurs propres de A.

3)Montrer que A est inversible.

4)Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2 :

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On effectue dans cette urne une suite de tirages **avec remise**.

Pour tout entier $k \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

Y_k = nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{si le k-ième tirage amène un numéro non tiré lors des tirages précédents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par convention, on pose $Y_0 = 0$. On peut remarquer que $Y_1 = Z_1 = 1$.

Exemple :

Prenons $n = 5$.

Supposons que les six premiers tirages donnent : 2, 3, 5, 2, 4 et 3.

On a alors : $Y_1 = 1,\ Y_2 = 2,\ Y_3 = 3,\ Y_4 = 3,\ Y_5 = 4,\ Y_6 = 4$

$Z_1 = 1,\ Z_2 = 1,\ Z_3 = 1,\ Z_4 = 0,\ Z_5 = 1,\ Z_6 = 0.$

1)Déterminer la loi de Z_2.

2)Soit $k \geq 1$ un entier. On admet que $Y_k(\Omega) = [\![1, min(k,n)]\!]$.

a)Pour tout entier $j \in Y_k(\Omega)$, calculer $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1)$.

b)En déduire que $P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.

c)En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer que :

$$P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P(Z_j = 1).$$

3)Montrer par récurrence forte que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

4)Pour tout entier $k \geq 1$, calculer $E(Y_k)$.