
Correction DM1 cubes

Exercice 1 (edhec 2018 option maths approfondies)

1) f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \geq 0, f'_n(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$.

Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

Par ailleurs, f_n est continue (car dérivable) sur $\mathbf{R}_+$.

f_n réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $f_n(\mathbf{R}_+) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x), f_n(0) \right] =]-\infty, 1]$.

$0 \in]-\infty, 1]$ admet donc un unique antécédent u_n par f_n .

Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n .

2)a) $f_n(0) = 1, f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$ donc $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(0)$.

Comme f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, on déduit : $0 < u_n < 1$.

2)b) $f_n(u_n) = 0$ donne : $1 - u_n - u_n^n = 0$, soit $1 - u_n = u_n^n$.

On déduit : $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$.

Or, $0 < u_n < 1$ donc $1 - u_n > 0$ et $u_n^n > 0$, d'où $f_{n+1}(u_n) > 0$.

Par construction, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. D'après ce qui précède, $f_{n+1}(u_n) > 0$.

Donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est décroissante sur $\mathbf{R}_+$, on déduit : $u_n \leq u_{n+1}$.

Donc (u_n) est croissante.

2)c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc convergente vers L .

Comme $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n < 1$, on a par passage à la limite : $0 \leq L \leq 1$.

2)d) Supposons que $L \neq 1$, on a alors $0 \leq L < 1$.

(u_n) est croissante et converge vers L donc $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n \leq L$.

On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n^n \leq L^n$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^n = 0$ car $0 \leq L < 1$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ (*)

Par ailleurs, $f_n(u_n) = 0$ donne $u_n = 1 - u_n^n$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - u_n^n) = 1$, grâce à (*), ce qui contredit que $L \neq 1$.

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3)a) Comme $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n < 1$ et que $v_n = 1 - u_n$, on a : $v_n > 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - u_n) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'égalité $1 - u_n = u_n^n$ donne : $v_n = u_n^n$.

Donc $\ln(v_n) = \ln(u_n^n) = n \ln(u_n)$, soit $\ln(v_n) = n \ln(1 - v_n)$ (**)

Enfin, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donnent : $\ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.

Puis, $n \ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

De (**), on conclut que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

$$\begin{aligned} 3)b) & 1 + \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln\left(\frac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln(v_n) - \ln(-\ln(v_n)) + \ln\left(-\frac{\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{\ln(v_n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(v_n) - \ln(-\ln(v_n)) + \ln(-\ln(v_n)) - \ln(nv_n)}{\ln(v_n)} \\
&= \frac{\ln(v_n) - \ln(n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \\
&= \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln\left(\frac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)} \quad (*)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(v_n)) = +\infty$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

$$\text{D'après 3)a), on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{-nv_n} = 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right) = 0.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(v_n)) = -\infty, \text{ on a par quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)} = 0.$$

$$\text{En reportant ces limites dans } (*), \text{ on déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1.$$

$$\text{Donc } \ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n).$$

3)c) Comme $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$ et $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$, on déduit par transitivité que

$$-nv_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n), \text{ c'est-à-dire que } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

4) $\forall n \geq 3, \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. De plus, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

D'après le critère de comparaison des séries à termes $+$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

$$\text{Par ailleurs, la question 3)c) donne : } v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln(n))^2}{n^2}.$$

$$\text{Or, } \frac{(\ln(n))^2}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

$$\text{En effet, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(\ln(n))^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^{1/2}} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$).

Donc d'après le critère de négligeabilité, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ converge.

Puis, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum_{n \geq 1} v_n^2$ converge.

Exercice 2 (edhec 2015 option maths approfondies)

1) F est une partie de $\mathbf{R}_4[X]$ par construction et elle est non vide car le polynôme nul appartient à F .

Pour tous polynômes P et Q de F , pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)(0) &= \lambda P(0) + Q(0) \\ &= \lambda \times 0 + 0 \text{ car } P \in F \text{ et } Q \in F \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)(4) &= \lambda P(4) + Q(4) \\ &= \lambda \times 0 + 0 \text{ car } P \in F \text{ et } Q \in F \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda P + Q \in F$.

On conclut que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_4[X]$.

2)a) • Pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{R}_2[X]$, pour tout réel λ , on a :

$$\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda(WP) + WQ = \lambda\phi(P) + \phi(Q).$$

Donc ϕ est linéaire.

$$\begin{aligned}\bullet \quad Q \in \text{Ker } \phi &\iff \phi(Q) = 0 \iff WQ = 0 \iff \forall x \in \mathbf{R}, x(x-4)Q(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}, Q(x) = 0 \implies Q = 0 \text{ car } Q \text{ a une infinité de racines.}\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } \phi = \{0\}$, ce qui prouve que ϕ est injective.

$$\bullet \quad \forall Q \in \mathbf{R}_2[X], \phi(Q) \in \mathbf{R}_4[X] \text{ car } \deg(W) = 2 \text{ et } \deg(Q) \leq 2.$$

Donc $\text{Im } \phi \subset F$.

Réciproquement, soit $P \in F$. La division euclidienne de P par W donne :

$$P = WQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(W) = 2.$$

$$\text{On a alors } \forall x \in \mathbf{R}, P(x) = W(x)Q(x) + R(x).$$

Cette égalité pour $x = 0$ donne :

$$P(0) = W(0)Q(0) + R(0), \text{ soit } 0 = 0 \times Q(0) + R(0), \text{ puis } R(0) = 0.$$

Cette égalité pour $x = 4$ donne de même : $R(4) = 0$.

R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines, il est donc égal au polynôme nul.

On déduit que $P = WQ = \phi(Q)$, ce qui montre que $P \in \text{Im } \phi$.

Donc $F \subset \text{Im } \phi$.

On conclut que $\text{Im } \phi = F$. Donc $\phi : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow F$ est surjective.

• ϕ est donc une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_2[X]$ sur F , c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ sur F .

$$2)b) F = \text{Im } \phi = \text{Vect} \left(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2) \right) = \text{Vect} \left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4) \right).$$

$(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$ est donc une famille génératrice de F .

De plus, pour tous réels a , b et c , on a :

$$aX(X-4) + bX^2(X-4) + cX^3(X-4) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbf{R}, ax(x-4) + bx^2(x-4) + cx^3(x-4) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbf{R}, cx^4 + (b-4c)x^3 + (a-4b)x^2 - 4ax = 0$$

$$\iff \begin{cases} c &= 0 \\ b-4c &= 0 \\ a-4b &= 0 \\ -4a &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= & 0 \\ b &= & 0 \\ a &= & 0 \end{cases}$$

Donc la famille $(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$ est libre.

C'est donc une base de F , ce qui entraîne que $\dim F = 3$.

3)a) Posons $Q = aX^2 + bX + c$.

Alors, $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c$
 $= 2aX + (a+b) \in \mathbf{R}_2[X]$.

Ainsi, Δ est à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.

Pour tous polynôme P et Q de $\mathbf{R}_2[X]$, pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q).\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.

Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}3)b) \bullet Q \in \text{Ker}\Delta &\iff \Delta(Q) = 0 \iff 2aX + (a+b) = 0 \iff \begin{cases} 2a &= 0 \\ a+b &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}\Delta = \text{Vect}(1) = \{ \text{polynômes constants} \}$.

• Le théorème du rang donne : $\dim \mathbf{R}_2[X] = \dim \text{Ker}\Delta + \dim \text{Im}\Delta$, c'est-à-dire :
 $3 = 1 + \dim \text{Im}\Delta$. Donc $\dim \text{Im}\Delta = 2$.

De plus, $\text{Im}\Delta \subset \mathbf{R}_1[X]$ et $\dim \mathbf{R}_1[X] = \dim \text{Im}\Delta$. Donc $\text{Im}\Delta = \mathbf{R}_1[X]$.

3)c) $\Delta(1) = 0$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(1) = 0$ par linéarité de Δ .

$\Delta(X) = (X+1) - X = 1$, puis $(\Delta \circ \Delta)(X) = \Delta(1) = 0$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(X) = 0$.

$\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$, puis $(\Delta \circ \Delta)(X^2) = \Delta(2X+1) = 2\Delta(X) + \Delta(1)$
 $= 2 + 0 = 2$ donc $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(X^2) = \Delta(2) = 0$.

$\Delta \circ \Delta \circ \Delta$ est un endomorphisme de $\dim \mathbf{R}_2[X]$ qui s'annule sur une base de $\dim \mathbf{R}_2[X]$. C'est donc l'endomorphisme nul.