DS1 cubes - ECG2 - 24 septembre 2025

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

Les questions 1) et 2) ont été modifiées par rapport au sujet original.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$pour tout $x \neq 0$.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. (a) Étudier les variations de l'application u définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$u(x) = (1 - x) e^x - 1$$
   (b) Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\quad \forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0.$
   (b) Montrer : $\quad \forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}.$
   (c) Montrer : $\quad \forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$
   (d) Établir : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|.$
3. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha).$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\quad \forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x)$.

   En déduire la limite de G en $+\infty$.

   (b) Montrer : $\quad \forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)$.

   En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2

Soient les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On étudie l'ensemble $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$.

1)a)Vérifier que $B \in E$.

b)Pour $n \in \mathbf{N}$, justifier que $A^n \in E$.

2)a)Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

b)En déduire que $E = \mathrm{Vect}\,(I, A, B)$.

3)Montrer que (I, A, B) est une base de E. En déduire la dimension de E.

4)Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculer PQ. Déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} à l'aide de Q.

b)Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

c)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

d)En déduire les coordonnées de la matrice A^n dans la base (I, A, B) de E.

Exercice 3

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a)Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b)Vérifier que $A = PDP^{-1}$ et $B = PEP^{-1}$.

2)Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = MB\}$.

a)En revenant à la définition, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

b)Montrer que $M \in F \iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPE$.

c)Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Montrer que $DX = XE \iff X \in \mathrm{Vect}\,(D)$.

Indication : poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre le système $DX = XE$.

d)En déduire que $F = \mathrm{Vect}\,(A)$. Quelle est la dimension de F ?