
TD1 - Espaces vectoriels

Exercice 1 ★ ★ ★ ★

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que U est combinaison linéaire de U_1 , U_2 et U_3 .

Exercice 2 ★ ★ ★ ★

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, soient $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_1 = (1, 1, 2)$ et $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$.

Montrer que $\vec{u}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Exercice 3 ★ ★ ★ ★

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$, on considère les polynômes :
 $P = X^3 + 3X^2 + 2X$, $P_1 = X^3 - X$ et $P_2 = X^3 + X^2$.

Montrer que P est combinaison linéaire de P_1 et P_2 .

Exercice 4 ★ ★ ★ ★

Soit F la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}.$$

Déterminer des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
Préciser alors une famille génératrice de F .

Exercice 5 ★ ★ ★ ★

Soit F la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et déterminer une famille génératrice de F .

Exercice 6 ★ ★ ★ ★

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et soit $\mathcal{C}(A)$ la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.¹

Exercice 7 ★ ★ ★ ★

Soient $\vec{u}_1 = (2, 1, 3)$, $\vec{u}_2 = (3, 5, -2)$ et $\vec{u}_3 = (-6, -17, 17)$.

Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

- 1) Montrer que $\vec{u}_3$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- 2) Trouver une famille génératrice de F constituée de deux vecteurs.

1. $\mathcal{C}(A)$ s'appelle le commutant de A

Exercice 8 ★ ★ ★ ★

Soient $\vec{u} = (-1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, -5, -1)$ et $\vec{w} = (0, 1, -2)$.

- 1) Justifier sans calcul que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre.
- 2) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre.

Exercice 9 ★ ★ ★ ★

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$.

Montrer que (A, B, C) est une famille libre.

Exercice 10 ★ ★ ★ ★

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que (I, J, K) est une famille liée.

Exercice 11 ★ ★ ★ ★

On considère les polynômes P , Q et R de $\mathbf{R}_2[X]$ définis par :

$P = X^2 - X + 1$, $Q = -2X^2 + X + 3$ et $R = 4X^2 - 3X - 1$.

- 1) Vérifier que $-2P + Q + R = 0$.
- 2) Que peut-on conclure sur la famille (P, Q, R) ?

Exercice 12 ★ ★ ★ ★

Soient $\vec{u}_1 = (1, 2)$ et $\vec{u}_2 = (2, 3)$.

- 1) Justifier sans calcul que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
- 2) Soit $\vec{u}_3$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$.

Expliquez pourquoi la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ n'est pas une base de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 13 ★ ★ ★ ★

Soient $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 14 ★ ★ ★ ★

Soient $\vec{u} = (1, 6, 9)$, $\vec{v} = (1, 4, 6)$ et $\vec{w} = (3, 6, 2)$.

Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 15 ★ ★ ★ ★

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^t M = M\}$.

- 1) Citer une base de E . Quelle est la dimension de E ?
- 2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- 3) Déterminer une base de F . Quelle est la dimension de F ?

Exercice 16 ★ ★ ★ ★

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{C} = (U, V, W)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
- 2) Déterminer les coordonnées de X dans $\mathcal{B}$.
- 3) Sans utiliser la formule de changement de base, déterminer les coordonnées de X dans $\mathcal{C}$.

Exercice 17 ★ ★ ☆ ☆

On considère les polynômes f_1, f_2, f_3 et u de $\mathbf{R}_2[X]$ définis par :

$$f_1 = 1, f_2 = X - 1, f_3 = (X - 1)^2 \text{ et } u = 2X^2 - X + 6.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$.

- 1) Rappeler la dimension de $\mathbf{R}_2[X]$, puis établir que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- 3) Justifier que P est inversible et déterminer son inverse.
- 4) Par la formule de changement de base, trouver les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 18 ★ ★ ☆ ☆

Soient $\vec{e}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, -1, 1)$ et $\vec{e}_4 = (1, 2, 2, 0)$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. On pose $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$

- 1) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- 2) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Que déduire pour $\mathcal{B}'$?
- 3) Par la formule de changement de base, trouver les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 19 ★ ★ ☆ ☆

Soient $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $\vec{u}_3 = (3, -1, -3, -3)$.

Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Exercice 20 ★ ★ ☆ ☆

Déterminer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 ★ ★ ★ ☆

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et F définie par :

$$F = \{f \in E \mid f'' = 2f' - f\}.$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Soit $f \in F$ et soit g la fonction de E définie par $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = f(x)e^{-x}$.
Montrer que $g'' = 0$. En déduire la forme de g , puis la forme de f .
- 3) Soient f_1 et f_2 les fonctions de E définies par $\forall x \in \mathbf{R}, f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = xe^x$.
Montrer que (f_1, f_2) est une base de F , puis préciser la dimension de F .

Exercice 22 ★ ★ ★ ☆

Pour toute $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note tM la transposée, définie par : ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{S}_2(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^tM = -M\}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
En donner une base, puis leur dimension.
- 2) Déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbf{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbf{R})$.
- 3) Donner une décomposition de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- 4) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Indications / Réponses

Exercice 1

On cherche des réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $U = \lambda_1.U_1 + \lambda_2.U_2 + \lambda_3.U_3$, ce qui se ramène au système :

$$\begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

On cherche des réels λ_1 et λ_2 tels que $\vec{u} = \lambda_1.\vec{u}_1 + \lambda_2.\vec{u}_2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

On cherche des réels λ_1 et λ_2 tels que $P = \lambda_1.P_1 + \lambda_2.P_2$, ce qui donne après regroupement des termes par degré :

$$X^3 + 3X^2 + 2X = (\lambda_1 + \lambda_2)X^3 + \lambda_2X^2 - \lambda_1X.$$

Et on identifie les termes degré par degré pour obtenir un système ...

Exercice 4

On exprime une lettre au choix en fonction des deux autres (voir exercice de cours).

$$z = x + 3y \text{ donne } F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 3)),$$

$$x = -3y + z \text{ donne } F = \text{Vect}((-3, 1, 0), (1, 0, 1)),$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z \text{ donne } F = \text{Vect}((1, -\frac{1}{3}, 0), (0, \frac{1}{3}, 1)) = \text{Vect}((3, -1, 0), (0, 1, 3)).$$

Exercice 5

Voir exercice de cours.

Exercice 6

On montre que $\mathcal{C}(A)$ est non vide et stable par combinaison linéaire (voir exercice de cours).

Exercice 10

Trouver une relation simple entre I , J et K .

Exercice 13

Utiliser le théorème de coïncidence cardinal / dimension.

Exercice 14

Commencer par montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

Exercice 15

2) Montrer que F est stable par combinaison linéaire.

3) Commencer par trouver une famille génératrice de F en explicitant la forme des matrices de F , puis étudier si elle est libre.

Exercice 16

3) Il faut déterminer les réels a , b et c tels que $X = aU + bV + cW$, ce qui revient à résoudre un système.

Exercice 17

$$2) P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}^I$ sont $(7, 3, 2)$.

Exercice 18

$$1) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3) Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ sont $(1/4, 1/4, 1/2, 1/2)$.

Exercice 19

Commencer par étudier la liberté de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Exercice 20

Le plus simple est de transformer par Gauss A et B en des matrices triangulaires.

Exercice 21

1) Montrer que F est stable par combinaison linéaire.

3) Montrer d'abord que (f_1, f_2) est libre.

Exercice 22

1) Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{R})$ sont stables par combinaison linéaire.
Pour trouver une base, commencer par trouver une famille génératrice.

$$2) \text{ On trouve : } \mathcal{S}_2(\mathbf{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4) On pourra remarquer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ peut s'écrire :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M).$$