DM11 - à rendre le lundi / /

Exercice

Partie I

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1)Calculer $(A+2I)^2(A+I)$.

2)En déduire les valeurs propres possibles de A.

3)Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

4)A est-elle diagonalisable ?

5)Soient $u = (2,0,1)$, $v = (2,1,1)$ et $w = (1,0,0)$.

a)Exprimer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaison linéaire de u, v et w.

b)Montrer que $\mathscr{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

c)Ecrire la matrice T de f dans la base $\mathscr{C}$ et vérifier qu'elle est triangulaire.

d)Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Quelle égalité relient A, T, P et P^{-1} ?

Partie II

On considère le système différentiel $(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -2y-2z \\ y' & = & x-2y-2z \\ z' & = & x-y-3z \end{array} \right.$

où x, y et z sont des fonctions inconnues de la variable t.

6)Vérifier que (S) s'écrit matriciellement sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

7)On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, où u, v et w sont des fonctions de la variable t.

a)A l'aide de la question 5)d), montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

b)Vérifier que $Y' = TY \iff \left\{ \begin{array}{lcl} u' & = & -u \\ v' & = & -2v+w \\ w' & = & -2w \end{array} \right.$

c)Résoudre les équations différentielles $u' = -u$ et $w' = -2w$.

d)Soit c un réel quelconque. Soit (E) l'équation différentielle $v' = -2v + ce^{-2t}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-2t}$ est une solution particulière de (E), puis déterminer toutes les solutions de (E).

e)A l'aide des questions précédentes, résoudre le système différentiel écrit en 7)b).

8)A l'aide des questions précédentes, résoudre (S).

9)Vérifier que $(0,0,0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.