Exercice 1 (eml 2009)

Partie I

1)a)f est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient et différence de fonctions continues.

De plus, le cours donne : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

On conclut que f est continue sur $\mathbf{R}$.

b)f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient et différence de fonctions C^1.

$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$.

c)$\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \dfrac{x - e^x + 1}{x\,(e^x - 1)}$.

Or, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $x\,(e^x - 1) \underset{0}{\sim} x^2 \quad (1)$

De plus, le DL de cours donne : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, c'est-à-dire :

$x - e^x + 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} - o(x^2)$, ce qui mène à : $x - e^x + 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \quad (2)$

Par quotient de (1) et (2) : $\dfrac{x - e^x + 1}{x\,(e^x - 1)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2)a)u est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit et différence de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R},\ u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

b)D'après le tableau de variations de u, on a $\forall x \neq 0,\ u(x) < 0$.

De plus, on remarque que $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$.

Donc $\forall x \neq 0,\ f'(x) < 0$.

Par ailleurs, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Finalement, on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) < 0$.

c)• $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^x - 1) = -1$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Quand $x \to +\infty$, on écrit : $f(x) = \dfrac{x}{e^x\left(1-e^{-x}\right)} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1-e^{-x}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a vu que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

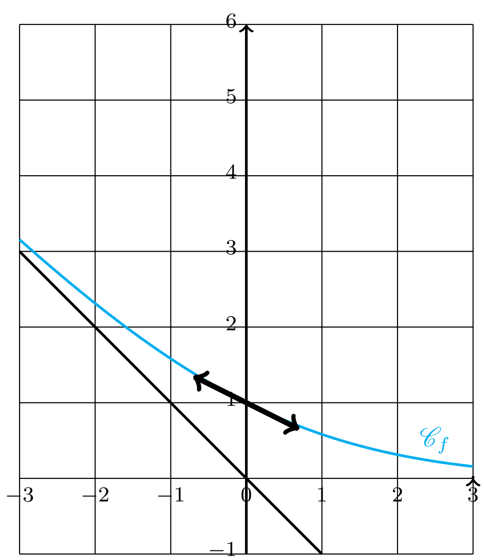
d)$\forall x < 0,\ f(x) - (-x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + x = \dfrac{x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

e)



Partie II

1)Pour tout $x \neq 0$, on a :

$f(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{x}{e^x - 1} = x \Longleftrightarrow e^x - 1 = 1 \Longleftrightarrow e^x = 2 \Longleftrightarrow x = \ln 2.$

De plus, $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe.

Finalement, l'unique point fixe de f est $\alpha = \ln 2$.

2)a)Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par : $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0,\ g'(x) = 2e^{2x} - 2\left(e^x + xe^x\right) = 2e^x\left(e^x - x - 1\right)$.

De plus, la fonction exponentielle étant convexe, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes donc en particulier au-dessus de sa tangente en 0.
Or, l'équation de la tangente en 0 est : $y = x + 1$.
On a ainsi $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x + 1$.

On déduit que $\forall x \geq 0,\ g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.

Et comme $g(0) = 0$, on a finalement $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

On conclut que $\forall x \geq 0,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

b)En utilisant le calcul de $f'(x)$ fait en I)1)b), on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2\big((1-x)e^x - 1\big) + \left(e^x - 1\right)^2}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\
&= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\
&= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}.
\end{aligned}$$

c)La question I)2)b) donne déjà : $\forall x \geq 0,\ f'(x) < 0$.

Des questions II)2)a) et II)2)b), on déduit : $\forall x > 0,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0$,

c'est-à-dire $\forall x > 0,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x)$.

Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$ puisque $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Finalement, on a bien $\forall x \geq 0,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d)f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de $[0, +\infty[$, on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a| \quad (*)$$

Prenons $a = \alpha$ et $b = u_n$.

On a bien $\alpha \in [0, +\infty[$ puisque $\alpha = \ln 2$.

De plus, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \in [0, +\infty[$ car $u_n = f(u_{n-1})$ et f est positive.
Et comme $u_0 \geq 0$ par énoncé, on a même $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in [0, +\infty[$.
On remplaçant dans $(*)$ a et b par les valeurs qu'on a choisies, on obtient :
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
Par construction, on a : $f(u_n) = u_{n+1}$.
De plus, $f(\alpha) = \alpha$ puisque α est un point fixe de f.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
3)Récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $|u_0 - \alpha| \leq (1-\alpha)$ ».
Or, $u_0 - \alpha = 1 - \ln 2 > 0$ donc $|u_0 - \alpha| = u_0 - \alpha = 1 - \alpha$. Et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par HR, on a : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
En multipliant membre à membre l'inégalité par $\dfrac{1}{2}$, on a :
$\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.
Puis, en recollant avec l'inégalité II)2)d) : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
4)On sait que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$.
Cela signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
5)programme :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x/(np.exp(x)-1)
    return y
u=1
n=0
while np.abs(u-np.log(2))>10**-9:
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Python renvoie $n = 21$.

Partie III

1)f est continue sur $\mathbf{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbf{R}$.

On a alors $\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = \big[F(t)\big]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$.

F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ car F est dérivable et $F' = f$ est continue.

$x \mapsto 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Par composée, $x \mapsto F(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Par différence, G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

On déduit : $\forall x \neq 0,\ G'(x) = 2 \times \dfrac{2x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x}{e^x - 1}$

$$= \frac{4x}{(e^x+1)(e^x-1)} - \frac{x}{e^x-1}$$
$$= \frac{4x - x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$
$$= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}.$$

Enfin, $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

2)a)• Soit $x \geq 0$. On a alors : $x \leq 2x$.

f est positive sur $[x, 2x]$. Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \geq 0$, c'est-à-dire $G(x) \geq 0$.

Par ailleurs, f est décroissante sur $\mathbf{R}$ donc sur $[x, 2x]$.

On a alors : $\forall t \in [x, 2x],\ f(t) \leq f(x)$.

En intégrant entre les bornes croissantes x et $2x$:

$\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \leq \int_x^{2x} f(x)dt$

C'est-à-dire : $G(x) \leq f(x) \displaystyle\int_x^{2x} 1dt$, avec $\displaystyle\int_x^{2x} 1dt = \big[t\big]_x^{2x} = 2x - x = x$.

Donc $G(x) \leq xf(x)$.

On conclut que $\forall x \geq 0,\ 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.

• L'inégalité ci-dessus s'écrit $\forall x \geq 0,\ 0 \leq G(x) \leq \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

$e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x$ donc $\dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{e^x}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

b)• Soit $x \leq 0$. On a alors $2x \leq x$.

Toujours par décroissante de f sur $[x, 2x]$, on a : $\forall t \in [2x, x],\ f(t) \geq f(x)$.

En intégrant entre les bornes croissantes $2x$ et x :

$\displaystyle\int_{2x}^{x} f(t)dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)dt$, puis $-\displaystyle\int_{2x}^{x} f(t)dt \leq -\int_{2x}^{x} f(x)dt$, ce qui donne par antisymétrie de l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \leq \int_x^{2x} f(x)dt$.

C'est-à-dire : $G(x) \leq xf(x)$ en reprenant le calcul effectué à la question III)2)a).

• On a donc $\forall x \leq 0,\ G(x) \leq \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$.

Par passage à la limite, $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

3)On étudie le signe de $G'(x)$ qu'on a calculée en III)1).

$3 - e^x \geq 0 \iff e^x \leq 3 \iff x \leq \ln 3$.

$e^{2x} - 1 \geq 0 \iff e^{2x} \geq 1 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	

On déduit finalement le tableau de variations de G :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Exercice 2 (ESC 1998 remanié) :

1) a) On a AB = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et BA = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ donc AB = BA.

Donc B appartient à E.

b) $AA^n = A^{n+1}$ et $A^n A = A^{n+1}$ donc $AA^n = A^n A$ donc A^n appartient à E.

2) a)Soit M = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{R})$.

M ϵ E <=> AM = MA

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a+c & b \\ e & d+f & e \\ h & g+i & h \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} f=h=d=b \\ a+c=e \\ g+i=e \\ a+g=e \\ c+i=e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f=h=d=b \\ a+c=e \\ a=i \\ g=c \end{cases}$$

$$\iff M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Donc E = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

b)E= $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$= \{a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{aI + bA + cB \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Donc E = Vect(I, A, B)

3) (I, A , B) est déjà une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre.

$$aI + bA + cB = O \iff a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

(I,A,B) est une famille libre et génératrice de E donc une base de E.

4)Soients $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

a) $PQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$

Donc $P[\frac{1}{4} Q] = I$ ce qui prouve que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4} Q$

b) $D = P^{-1} AP = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Donc D = $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ qui est bien diagonale.

c) Soit E(n) l'énoncé : « $A^n = PD^nP^{-1}$ »
E(1) s'écrit : «$A = PDP^{-1}$ » soit «$D = P^{-1} AP$ » ce qui est vrai
Soit $n \geq 0$ un entier quelconque. Supposons E(n) vrai.
$A^{n+1} = AA^n \underset{HR}{=} (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1} P)D^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Donc E(n+1) est vrai.

Donc pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = PD^nP^{-1}$

d) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-\sqrt{2})^n & 0 & (\sqrt{2})^n \\ (-\sqrt{2})^{n+1} & 0 & (\sqrt{2})^{n+1} \\ (-\sqrt{2})^n & 0 & (\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \\ (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^{n+2}+(-\sqrt{2})^{n+2} & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} \\ (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n & (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} & (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \quad I + \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} \quad A + \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \quad B$$

Donc les coordonnées de la matrice A^n dans la base (I , A , B) sont :

$\left(\frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \; , \; \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^{n+1}+(-\sqrt{2})^{n+1} \; , \; \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n \right)$

Exercice 3 :

1)a)On trouve $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

b)On vérifie que $A = PDP^{-1}$ et $B = PEP^{-1}$ ...

2)a)F n'est pas vide car la matrice nulle appartient à F du fait que AO=OB=O.
Soient M et M' deux matrices de F et soit a un réel.

$$\begin{aligned} A(aM+M') &= AaM+AM' \\ &= aAM + AM' \\ &= aMB + M'B \text{ car } M \text{ et } M' \text{ sont dans } F \\ &= (aM+M')B \end{aligned}$$

Donc aM+M' appartient à F, ce qui montre la stabilité de F par combinaison linéaire.
On conclut que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

2)b)

$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM = MB \\ &\iff (PDP^{-1})M = M(PEP^{-1}) \\ &\iff P^{-1}(PDP^{-1})MP = P^{-1}M(PEP^{-1})P \\ &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E \end{aligned}$$

2)c)Soit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$DX = XE \iff \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 9a & 9b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a & 3b \\ 9c & 3d \end{bmatrix}$$

$$\iff b = c = d = 0$$

Donc $DX = XE \iff X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où a réel qcq $\iff X = \frac{a}{9} D,\ a \in \mathbb{R} \iff X \in \mathrm{Vect}(D)$

2)d)Partons de 2)c) :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathrm{Vect}(D) \qquad \text{[en utilisant la question précédente avec } X = P^{-1}MP \text{]} \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \ /\ P^{-1}MP = \lambda D \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \ /\ P(P^{-1}MP)P^{-1} = P(\lambda D)P^{-1} \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \ /\ M = \lambda\,(PDP^{-1}) \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \ /\ M = \lambda A \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}(A) \end{aligned}$$

Donc F = Vect (A) .

A étant une matrice non-nulle, (A) est une famille libre de F . C'est aussi une famille génératrice de F par construction.
Donc (A) est une base de F et dim F = 1.