Chapitre 8 : intégrales

I)Primitives

Déf : soit f est une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Propriété 1

Toute fonction f continue sur I admet au moins une primitive sur I.
Si F est l'une d'elles, alors les primitives de f sur I sont de la forme
$x \longmapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle quelconque.

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions continues sur I, de primitives respectives F et G.
Soit λ un réel quelconque.
Alors, $F + G$ et λF sont des primitives respectives de $f + g$ et λf sur I.

> Remarque
> Une primitive de fg n'est pas FG.

Propriété 3 (primitives usuelles)

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbf{R}$	ax
$x^\alpha \ \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$u'(x)u(x)^\alpha \ \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'(x)u(x)^{-1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
e^x	e^x
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$

<u>Exercice 1</u>

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1)$f(x) = x^4$ 2)$f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ 3)$f(x) = x + 4$ 4)$f(x) = 4x$

5)$f(x)=4^x$ 6)$f(x)=\dfrac{1}{4x+1}$ 7)$f(x)=\dfrac{5}{(4x+1)^3}$

8)$f(x)=(4x+1)^5$ 9)$f(x)=e^{4x+1}$.

II)Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Déf : soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I.
Soient a et b deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f entre a et b, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

> Remarque
> Ce nombre est indépendant du choix de la primitive F.

<u>Exercice 2</u>
Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x+1)(x^2-3)\mathrm{d}x$.

III)Propriétés élémentaires de l'intégrale

Propriété 4
Soit f une fonction continue sur I. Soient a, b, c des réels de I.

$\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0,$

$\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (antisymétrie),

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ (relation de Chasles).

Propriété 5 (linéarité)
Soient f et g deux fonctions continues sur I. Soit α un réel.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

$\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

IV)Propriétés où les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant

Dans ce paragraphe, f est continue sur I, a et b réels de I avec $\mathbf{a}\leq\mathbf{b}$.

Propriété 6
Si $\forall x\in[a,b]\,,\ f(x)\geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

Propriété 7 (intégration d'inégalités)
Si $\forall x\in[a,b]\,,\ f(x)\geq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Propriété 8
Prenons $a < b$ et supposons que $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a, b]\,,\ f(x) = 0$.

Propriété 9 (inégalité triangulaire)

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

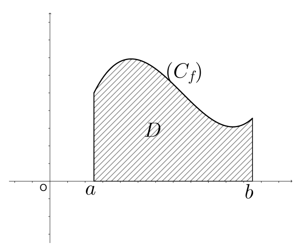
<u>Exercice 3</u>

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\left|\int_{-1}^0 \frac{x^n}{x+2}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

V)Interprétation graphique de l'intégrale

Propriété 10
Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]\,,\ f(x) \geq 0$.
Soit D le domaine compris entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $\mathscr{C}_f$.

Alors, aire(D)=$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Remarque

Si f n'est pas positive sur $[a, b]$, alors : aire(D)=$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

<u>Exercice 4</u>
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$.
Calculer l'aire du domaine compris entre les droites d'équation $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ et la courbe (C_f).

VI)Intégration par parties

Théorème 1
Soient f et g deux fonctions continues de classe C^1 sur un intervalle I.
Alors, quels que soient les réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

<u>Exercice 5</u>

Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\ \mathrm{d}x$.

VII)Changement de variable

Théorème 2
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $\varphi : J \to I$ une fonction de classe C^1.
Alors, quels que soient les réels α et β de J, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

<u>Exercice 6</u>
En posant $t = 2x+1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\mathrm{d}x$. Réponse : $\dfrac{2-\ln 3}{4}$.

Propriété 11
Soit $a > 0$ un réel. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1)si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

2)Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

VIII)Fonction définie par une intégrale

Propriété 12
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
Soit φ, la fonction définie pour tout $x \in I$ par :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Alors, φ est une fonction de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = f(x)$.

> Remarque
> φ est donc l'unique primitive de f sur I telle que $\varphi(a) = 0$.

<u>Exercice 7</u>
Déterminer une primitive de $f(x) = \ln(2x+1)$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

<u>Exercice 8</u>
Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.

1)Justifier que ψ est bien définie sur $]1, +\infty[$.

2)Justifier que ψ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer $\psi'(x)$.